

Flujos convergentes asimétricos: formación de crestas

Carlos Alberto Perazzo^{1,2,*} y Julio Gratton^{1,3,**}

¹Investigador del CONICET.

²Universidad Favaloro, Solís 453, 1078 Buenos Aires.

³INFIP-CONICET, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA, Ciudad Universitaria, Pab. I, 1428 Buenos Aires.

Investigamos la evolución de la cresta producida por el movimiento convergente asimétrico de dos substratos sobre los cuales reposa una capa inicialmente uniforme de un líquido Newtoniano. La asimetría del flujo se debe a que cada substrato se mueve con diferente velocidad. Para tiempos cortos tanto la altura como el ancho aumentan como $t^{1/2}$ y el perfil es simétrico, independientemente del grado de asimetría del movimiento de los substratos. Para tiempos largos el ancho y la altura de la cresta siguen las mismas leyes de potencia que en el caso simétrico, pero los perfiles son asimétricos.

We investigate the evolution of the ridge produced by the nonsymmetrical convergent motion of two substrates over which an initially uniform layer of a Newtonian liquid rests. The lack of symmetry of the flow arises because the substrates move with different velocities. For short times the height and the width increase as $t^{1/2}$ and the profile is symmetric independently of the degree of asymmetry of the motion of the substrates. For large time the height and the width of the ridge follow the same power laws as in the symmetric case, but the profiles are asymmetric.

I. INTRODUCCIÓN

Este trabajo procura fundamentar la física básica que da lugar a las leyes de escala para la evolución de cordilleras ya obtenidas por medio de análisis dimensional [1]. Continuando un trabajo reciente [2] investigamos aquí un modelo que consiste de una capa fluida uniforme que descansa sobre un substrato horizontal y plano dividido en dos partes, que para $t > 0$ son empujadas la una hacia la otra con diferente velocidad. Estos movimientos arrastran el líquido y producen una cresta (ver figura 1). Aquí damos detalles de la evolución del flujo que, al igual que en el caso simétrico, tiene dos regímenes autosemejantes que se alcanzan en diferentes dominios espacio temporales y cuyas leyes de escala investigamos.

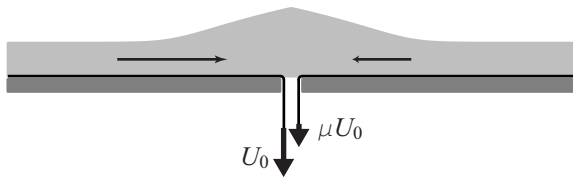


Figura 1: Formación de una cresta debido al movimiento convergente asimétrico de los substratos.

II. ECUACIONES BÁSICAS

Sea una capa líquida uniforme semiinfinita de espesor H_0 , que reposa sobre una superficie rígida horizontal. En $T = 0$ la parte izquierda del substrato comienza a moverse con velocidad $U_0 > 0$ y la derecha con la velocidad $-\mu U_0 < 0$, donde $0 \leq \mu \leq 1$ cuantifica la asimetría. De este modo el flujo de masa $U_0 H_0$ que viene desde la izquierda es mayor en valor absoluto que el que viene desde la derecha $\mu U_0 H_0$. Supondremos que el flujo es lento y dominado por la viscosidad de manera que se puede emplear la aproximación de lubricación (despreciamos la capilaridad). Sea $H \equiv H(X, T)$ el espesor de la capa líquida y $U \equiv U(X, T)$ la velocidad horizontal promediada verticalmente. Definimos las variables adimensionales u, h, x, t por medio de

$$U = U_0 u, \quad H = H_0 h,$$

$$X = \frac{g}{3\nu} \frac{H_0^3}{U_0} x, \quad T = \frac{g}{3\nu} \frac{H_0^3}{U_0^2} t,$$

donde g es la aceleración de la gravedad y ν es la viscosidad cinemática. La ecuación de evolución es entonces:

$$h_t = -h_x + (h^3 h_x)_x, \quad \text{si } x < 0 \quad (1)$$

$$h_t = \mu h_x + (h^3 h_x)_x, \quad \text{si } x > 0$$

La condición de contorno en $x \rightarrow \pm\infty$ es $h(\pm\infty, t) = 1$. En $x = 0$ la altura h es continua, pero $\partial h/\partial x$ tiene una discontinuidad dada por

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x \rightarrow 0^-} - \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x \rightarrow 0^+} = \frac{1 + \mu}{h(0, t)^2}. \quad (2)$$

Esta condición implica que en $x = 0$ hay un flujo de masa de la izquierda a la derecha, que no existía en el

*Correo electrónico: perazzo@favaloro.edu.ar

**Correo electrónico: jgratton@infip.lfp.uba.ar

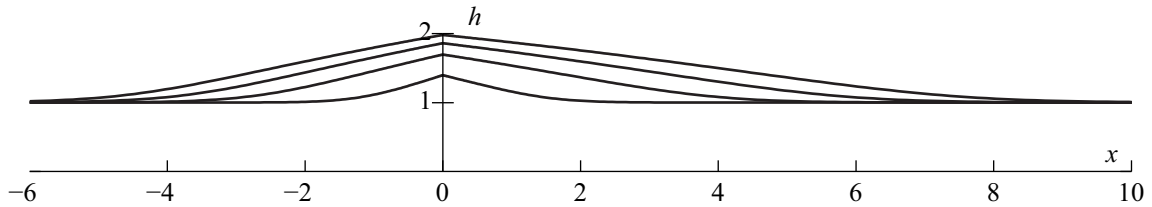


Figura 2: Perfiles numéricos con $\mu = 0.1$ para $t = 0.6, 2.4, 4.2, 6$.

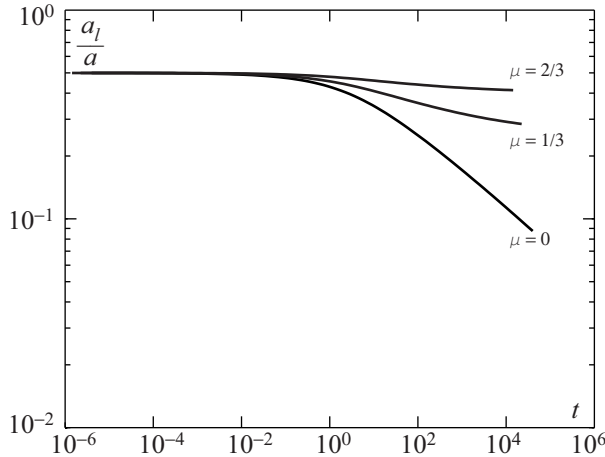


Figura 3: Cociente entre el area acumulada en $x < 0$ dividida por el area total incorporada para $\mu = 0, 1/3$ y $2/3$.

caso simétrico. Por lo tanto para un dado μ se deben resolver las ecuaciones (1) a partir de la condición inicial $h(x,0) = 1$, y sujetas a la condición de empalme (2) en $x = 0$. Notar que ahora la conservación de la masa implica

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_t dx = 1 + \mu.$$

III. SOLUCIONES NUMÉRICAS

El problema (1-2) no tiene en general una solución en forma cerrada, por lo que se debe resolver numéricamente. Algunos resultados se muestran en la figura 2. Se puede observar que a pesar de la asimetría del movimiento de los substratos, para todo μ la cresta se mantiene en $x = 0$ para todo t . Además el relieve es inicialmente simétrico para todo μ y se torna asimétrico recién para tiempos grandes. La asimetría crece con t pero finalmente para tiempos muy grandes tiende a saturar, salvo para el caso totalmente asimétrico $\mu = 0$. Esto se puede observar en la figura 3, donde se ha representado la evolución del cociente entre el área a_i incorporada al relieve en el intervalo $-\infty < x < 0$ y el área total incorporada a . Para tiempos $t \lesssim 10^{-2}$ se tiene $a_i/a \approx 1/2$ para todo μ lo que

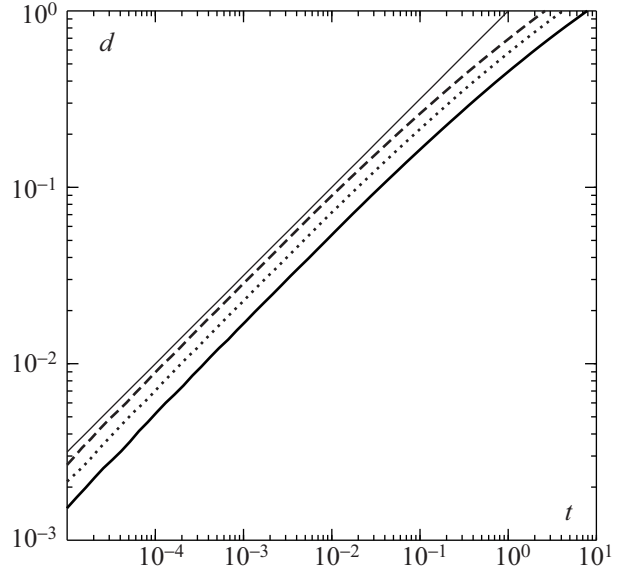


Figura 4: Evolución del desnivel máximo d de la cresta para $\mu = 0$ (línea continua), $1/3$ (línea de puntos) y $2/3$ (línea de trazos). La línea recta corresponde a $t^{1/2}$.

indica que la asimetría aún no se manifestó. Para tiempos más grandes a_i/a disminuye, tanto más rápidamente cuanto menor es μ , pero tiende a saturar para tiempos muy largos. Esta tendencia a la saturación se pone en evidencia más temprano para μ grande. En el caso $\mu = 0$ no se observa tendencia a la saturación.

De manera parecida al caso simétrico, $h(x)$ tiene dos puntos de inflexión (uno de cada lado) que a medida que crece t se desplazan hacia $|x|$ mayores y tienden hacia los frentes de la perturbación (las partes del relieve donde h se aproxima a 1). También se observa que para $t \gtrsim 10^{-2}$ el cociente de aspecto (altura / ancho) disminuye con el tiempo, porque el ancho del relieve crece más rápidamente que la altura de la cresta.

IV. COMPORTAMIENTO PARA $t \ll 1$

La figura 4 muestra la evolución del desnivel máximo $d \equiv h_w - 1$ donde $h_w \equiv h(x = 0, t)$ para $\mu = 0, 1/3$ y $2/3$. Se puede observar que igual que en el caso simétrico [2] se cumple la ley de escala $d \propto t^{1/2}$ independientemente de

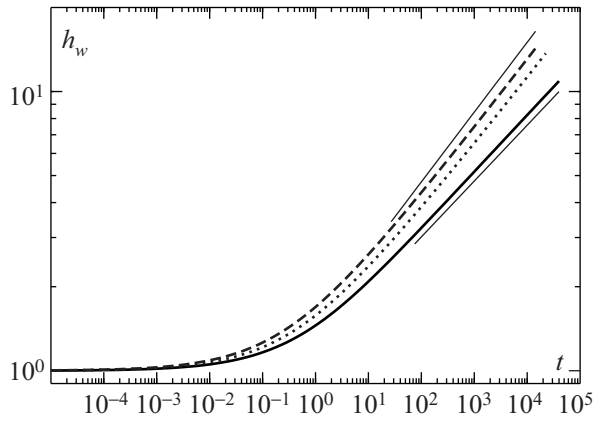


Figura 5: Altura máxima h_w de la cresta en función del tiempo para $\mu = 0$ (línea continua), $1/3$ (línea de puntos) y $2/3$ (línea de trazos). Las líneas rectas corresponden a las leyes de escala $h_w \propto t^{1/4}$ y $h_w \propto t^{1/5}$.

μ . En conclusión estos resultados sugieren que la solución para tiempos breves es autosemejante.

V. COMPORTAMIENTO PARA $t \gg 1$

En la figura 5 se muestra la altura máxima de la cresta h_w , nuevamente para $\mu = 0, 1/3$ y $2/3$. Se puede observar que para $\mu \neq 0$ se cumple para tiempos largos que $h_w \propto t^{1/4}$, tal como en el caso simétrico [2]. Este resultado lleva a pensar que (cuando $\mu \neq 0$) se alcanza un régimen autosemejante análogo al de dicho caso. En cambio, para

$\mu = 0$ se observa que $h_w \propto t^{1/5}$.

VI. CONCLUSIONES

El máximo de la cresta permanece en $x = 0$ para todo t . Igual que en el caso simétrico la evolución del relieve ocurre en dos etapas. En la etapa inicial ($t \lesssim 10^{-2}$) la cresta es simétrica alrededor de $x = 0$ independientemente de μ y su altura y su ancho escalan como $t^{1/2}$. Para t más grandes la cresta se vuelve asimétrica porque la masa se tiende a acumular en $x > 0$ y por lo tanto el perfil se vuelve más angosto y empinado en $x < 0$. Para t muy grande ($t \gtrsim 10^2$) y $0 < \mu \leq 1$ se desarrolla un régimen autosemejante en el cual el perfil de la cresta tiene una asimetría fija dado que a_i/a se mantiene constante y la altura y el ancho escalan como $t^{1/4}$ y $t^{3/4}$ respectivamente, igual que en el caso simétrico. Por lo tanto se cumplen en este caso las leyes de escala obtenidas a partir del análisis dimensional [1]. El caso $\mu = 0$ es diferente. A medida que t crece, la porción $x > 0$ de la cresta se vuelve cada vez más dominante y la altura y el ancho de esa porción escalan como $t^{1/5}$ y $t^{4/5}$ respectivamente.

Se puede mostrar la existencia de los regímenes autosemejantes antes mencionados. Los detalles serán materia de otra publicación.

Agradecimientos

Agradecemos los subsidios PIP 5377 del CONICET, X031 de la Universidad de Buenos Aires, PICTR 2002-00094 y PICTO 21360 de la ANPCYT.

[1] J Gratton, *J. Geophys. Res.* **94**, 15627–15634, 1989.

[2] CA Perazzo & J Gratton, *Phys. Fluids* **20**, 043103, 2008.