

CORRIENTES DE GRAVEDAD SOBRE UNA CAPA POROSA QUE YACE SOBRE UNA SUPERFICIE IMPERMEABLE

GRAVITY CURRENTS OVER A POROUS SUBSTRATE LYING ON AN IMPERMEABLE BOTTOM

L.P. Thomas¹, B.M. Marino

Instituto de Física Arroyo Seco, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Pinto 399, 7000 Tandil, Argentina

e-mail: lthomas@exa.unicen.edu.ar, bmarino@exa.unicen.edu.ar

Estudiamos las corrientes de gravedad generadas en un canal de sección transversal rectangular sobre un lecho poroso que reposa sobre un fondo impermeable. Realizamos experimentos de laboratorio en los que se varían los diferentes parámetros iniciales como el volumen, la diferencia relativa de densidad entre los fluidos de la corriente y ambiente y la relación alto-ancho del fluido denso. Del análisis de la evolución temporal de la masa y velocidad del frente de la corriente para diferentes espesores del medio poroso, encontramos que estas son afectadas por la profundidad del lecho, y más notoriamente para los valores más grandes de la diferencia relativa de densidad. En cambio, el volumen o la relación de aspecto iniciales parecen no influenciar los resultados cuando se los compara con los obtenidos al estudiar los flujos de gravedad sobre fondos rígidos o sobre capas porosas sin el fondo impermeable.

Palabras Claves: corrientes de gravedad, medios porosos, experimentos de laboratorio

We study the gravity currents over a porous medium that lies on an impermeable bottom in a rectangular cross-section channel. Laboratory experiments were performed in which the different initial parameters (volume, relative density difference between the current and ambient fluids, height-width relationship of the dense fluid) are varied. From the analysis of the time evolution of the mass and front velocity of the current for different thickness of the porous medium, it is found that they are affected by the thickness of the bed and more notoriously for the highest values of the relative density difference. In contrast, the volume and the initial aspect ratios seem not influence the results when compared with those obtained with gravity flows running over solid bottoms or over porous beds without the impermeable bottom.

Key Words: gravity currents, porous media, laboratory experiments

I. INTRODUCCIÓN

Una corriente de gravedad es el flujo de un fluido dentro de otro generado por una diferencia de densidad entre ellos. Entre las muchas e importantes situaciones donde las corrientes de gravedad (CG) fluyen sobre medios porosos (MP) con una consecuente pérdida de masa, podemos citar como ejemplos aquél que concierne al movimiento de las ondas oceánicas internas cuando llegan a la corteza continental, donde la onda toma la forma de una CG sobre el lecho, o cuando el petróleo derramado sobre el mar fluye sobre la playa arenosa; el que se presenta en muchísimos hogares todos los días cuando se derrama miel sobre una tostada, o el menos frecuente avance de la lava volcánica sobre un lecho rocoso fracturado. El derrame (o escape) accidental de un líquido (o gas) tóxico, inflamable o explosivo almacenado en un contenedor rodeado por un terreno arenoso o con frondosa vegetación es otro ejemplo común.

El aspecto práctico más importante en todos los casos es la determinación de la masa absorbida por el lecho poroso, y la máxima distancia que la corriente

viaja antes de detenerse. El conocimiento de esta longitud, así como la determinación de la etapa en la cual la dilución del fluido en el medio circundante ha descendido por debajo del valor umbral, resultan útiles para cálculos asociados a factores de seguridad.

Las CG inerciales sobre superficies impermeables atraviesan por etapas distintivas bien conocidas. En la primera, o etapa de *slumping*, la parte delantera de la corriente mantiene una profundidad determinada y viaja a velocidad también constante. Esta etapa, para la cual las condiciones iniciales son importantes, finaliza cuando un *bore*, generado por la condición de contorno impuesta por el extremo trasero del tanque, alcanza el frente. A partir de este momento la corriente se desacelera y decrece en profundidad tendiendo a un régimen autosimilar en el cual el movimiento es determinado por un balance entre la resistencia al avance y la fuerza de flotación en el frente. La longitud horizontal x_f recorrida por el frente de la corriente durante esta segunda etapa es $x_f = \xi (g'_{0A_0})^{1/3} t^{2/3}$, donde $\xi = \xi(\phi_0) \approx 1.35$ para una profundidad fraccional inicial $\phi_0 = h_0/H = 1$, h_0 es la altura inicial del fluido

¹ Autor a quién debe dirigirse la correspondencia.

denso, H es la profundidad del fluido ambiente, $A_0 = x_0 h_0$ es el volumen inicial de fluido denso por unidad de ancho del canal, o el área lateral inicial, $g'_0 = g(\rho_c - \rho)/\rho$ es la gravedad reducida, ρ_c es la densidad inicial de la solución salina, ρ es la densidad del fluido ambiente, y t es el tiempo medido desde la liberación del fluido denso. Este comportamiento es exhibido por las soluciones de similaridad de las ecuaciones de aguas poco profundas derivadas por Fannelop & Waldman⁽¹⁾ y Hoult⁽²⁾ (ver también el trabajo de Gratton & Vigo⁽³⁾). Si Re disminuye lo suficiente, tiene lugar una tercera etapa en la cual las fuerzas viscosas gobiernan el flujo^(4,5) y la dinámica de la corriente es descrita por otra ley autosimilar.

Cuando una CG se desplaza sobre un MP, su dinámica es afectada de diversas formas que dependen de las condiciones de contorno impuestas en cada caso. Una forma común de modelar estos flujos en el laboratorio es mediante la liberación de un volumen finito de una solución salina en agua en el interior de un canal de sección transversal rectangular. Una canasta con pequeñas bolillas de vidrio modela el MP, debajo del cual se deja un canal que posibilita el flujo sin resistencia del líquido que ocupa los poros antes de ser desplazado por el fluido denso proveniente de la corriente⁽⁶⁻⁸⁾.

En este trabajo analizamos el caso ilustrado en la figura 1 en el que el lecho poroso reposa sobre una superficie impermeable. A continuación se analiza el marco teórico de la situación estudiada; luego se describen los experimentos de laboratorio realizados y se presentan los resultados obtenidos, los que se comparan con los del modelado analítico.

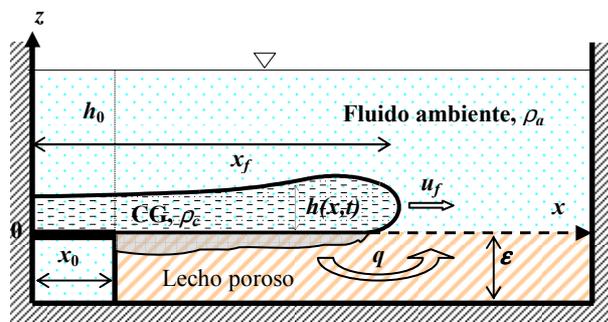


Figura 1: Esquema de una corriente de gravedad avanzando sobre un lecho permeable. El fluido denso ocupa inicialmente el compartimiento de altura h_0 y ancho x_0 .

II. TEORIA

Consideremos un lecho poroso inicialmente saturado y apoyado sobre una superficie impermeable, sobre el cual fluye una CG. A medida que avanza sobre el lecho, el fluido de la corriente también penetra en él desplazando el fluido ambiente más liviano que ocupa los poros. Dada la diferente resistencia al flujo sobre y en el medio permeable, la corriente se extiende horizontalmente una distancia más grande que la que penetra en el lecho, y la masa inicial liberada se reduce lentamente medida en tiempos o distancias característicos del flujo superior.

En consecuencia, esperamos que la evolución del flujo en el sistema descrito esté determinada por las soluciones de una CG sobre un fondo impermeable pero en función de una cantidad total de fluido denso que disminuye lentamente. En efecto, para cada estado caracterizado por un dado valor del área transversal A , el sistema físico tiende al régimen correspondiente si el tiempo de evolución es mucho más grande que el tiempo característico de la configuración inicial. Si un cambio significativo de $A(t)$ tiene lugar en un tiempo mayor que este tiempo característico, la solución con el valor instantáneo de $A(t)$ es una buena aproximación de la solución real. En este caso, la variación de $A(t)$ es dada por la pérdida de fluido denso a través del lecho que desplaza al fluido que ocupa los poros hacia abajo y hacia delante, ya que el contorno inferior es impermeable. Así, el flujo en el MP tiene componentes vertical y horizontal de intensidades análogas, de modo que no puede aplicarse el tratamiento desarrollado por Thomas *et al.*⁽⁸⁾, quienes consideran un flujo unidimensional vertical en el medio permeable debido a una diferente condición de contorno inferior.

II.1 Líneas de corriente en el medio poroso

El flujo se genera por la diferencia de presión entre el contorno del lecho en contacto con la CG y el contorno delante de ella. Sea el exceso de la presión hidrostática sobre el MP

$$p(x, z = 0) = \begin{cases} p_1(x) & \text{para } x \leq x_f \\ p_2 = 0 & \text{para } x > x_f \end{cases} \quad (1)$$

donde

$$P_1 = \int_0^{\infty} g(\rho_c - \rho_a) dz = \rho_a g' h \quad (2)$$

Si representamos la CG como una capa de fluido de profundidad constante h y densidad ρ_c , el exceso de presión (2) resulta uniforme. Por otra parte, en el contorno inferior del MP ($z = -\epsilon$), se verifica que

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Considerando en el interior del lecho un flujo bidimensional dominado por los efectos viscosos, la ley de Darcy provee el flujo por unidad de área a través del mismo:

$$\bar{q} = -\frac{\kappa}{\nu \rho} (\bar{\nabla} p - \rho \bar{g}) \quad (4)$$

donde q tiene unidades de velocidad por unidad de área, κ es la permeabilidad del lecho y ν es la viscosidad del fluido. Por otro lado, un flujo no estacionario puede tratarse con la ley de Darcy como una sucesión de estados estacionarios cuando la distribución de presión en el interior del MP se ajusta a las condiciones de contorno cambiantes instante a instante. Considerando incompresible al líquido que ocupa los poros, resulta que:

$$\bar{\nabla} \bar{q} = 0 \quad (5)$$

Usando (4), nos encontramos con:

$$\bar{\nabla} \bar{q} = \bar{\nabla}^2 p - \bar{g} \cdot \bar{\nabla} \rho = 0 \quad (6)$$

En el caso analizado, el flujo tiene lugar entre las

superficies correspondientes a $x \leq x_f$ y $x > x_f$ que se encuentran a un mismo nivel perpendicular a \bar{g} , y puesto que no hay una diferencia significativa entre las densidades de los líquidos, puede considerarse el flujo de un fluido único y uniforme como una primera aproximación del flujo real. Esto es válido si

$$\nabla^2 p \gg \bar{\nabla}(\rho \bar{g}) = 0 \quad (7)$$

En este caso:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

que no depende de la posición de la interfase entre el líquido ambiente y el más denso dentro del MP.

Resolviendo la Ec. (8) con las condiciones de contorno (1-3), se obtienen el campo de presión en el interior del MP y su función conjugada ψ , que en este caso es la función corriente. La Fig. 2 muestra las líneas de igual valor de las funciones p y ψ para $x_f/\varepsilon = 0.5, 1$ y 2 . Estas figuras sugieren las distribuciones de p y ψ para una misma CG sobre un MP para tres espesores diferentes, o bien para tres instancias sucesivas del flujo ($x_f = x_1, x_f = 2x_1, x_f = 4x_1$).

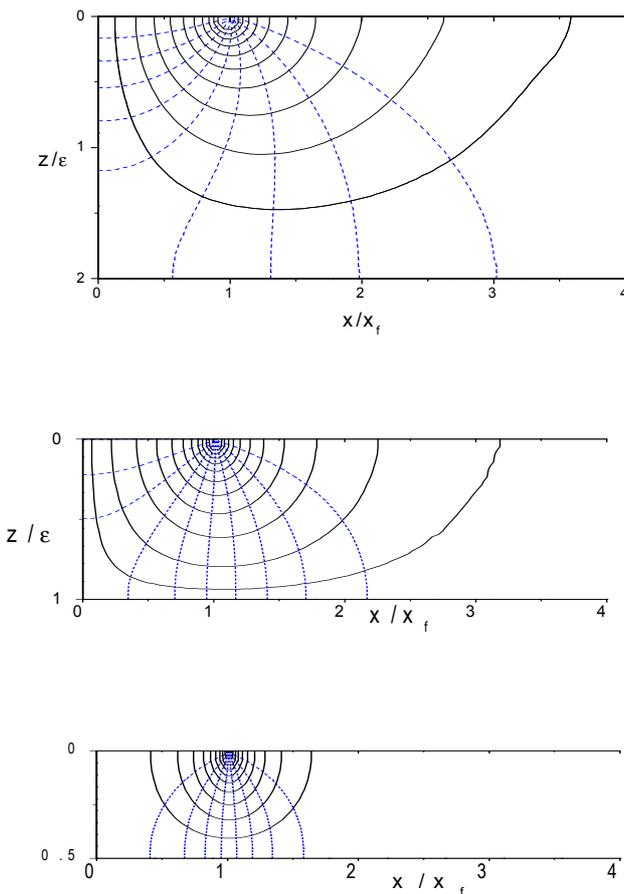


Figura 2. Funciones presión p y corriente ψ para x_f/ε igual a 2 (arriba), 1 (centro) y 0.5 (abajo). El contorno derecho se supone en $x = \infty$.

Para $x_f < \varepsilon$ las líneas equipotenciales de p sugieren que la pérdida de masa es significativa a lo largo del contorno superior del MP aunque con un máximo cerca del frente. Entonces, la distancia característica del flujo en el MP es dada por la propia CG. Para $x_f \approx \varepsilon$ la densidad de líneas de corriente en la región $x < x_f$ sugieren un menor flujo allí y una mayor concentración en el frente ($x \approx x_f$). Cuando $x_f > \varepsilon$ (para $\varepsilon = 0.5$) las líneas de corriente son círculos centrados en el frente. En este caso las condiciones de contorno en $x = 0$ y en $x \rightarrow \infty$ no cuentan ya que el flujo está confinado, básicamente, en una distancia horizontal del orden de ε .

II.2 Solución analítica aproximada

Se desea encontrar también una solución aproximada que describa como se modifica la masa de la CG. Para ello consideremos que el flujo q originado por la distribución de presión en la parte superior del MP domina en la región cercana al frente de la corriente. El gradiente de presión promedio en esta zona es:

$$\bar{\nabla} p \approx \Delta p / \Delta x = p_1 / \Delta x \quad (9)$$

Puesto que, como se dedujo más arriba, la CG impone la longitud característica, la escala espacial horizontal a la que la presión varía debe ser del orden de la distancia característica local, es decir la altura máxima de la corriente, $h(t)$, y el caudal de fluido denso en el MP es importante sólo en una región de longitud horizontal $h(t)$. La altura $h = h(t)$ es determinada en primera aproximación por la solución autosimilar de las CG sobre fondos impermeables. Luego, estimamos el orden de magnitud de este flujo como:

$$q \approx \frac{\kappa}{\nu \rho} \left(\frac{\Delta p}{h} \right) \quad (10)$$

En el caso de un MP de espesor mucho menor que la altura de la corriente, esperamos un cambio $\Delta x \approx h \approx \varepsilon$.

En consecuencia, el caudal por unidad de longitud transversal es

$$Q \approx qh = \begin{cases} \frac{\kappa g'}{\nu} h & \text{para } h < \varepsilon \\ \frac{\kappa g'}{\nu} \varepsilon & \text{para } h \geq \varepsilon \end{cases} \quad (11)$$

donde $\kappa g' / \nu = \omega$ es la velocidad característica del flujo en el MP, conocida como *conductividad hidráulica* en los estudios de aguas subterráneas cuando $g' \equiv g$. La conservación de la masa sugiere que

$$-\frac{dA}{dt} = Q. \quad (12)$$

Estamos interesados en la variación de masa durante la etapa de *slumping* y su transición hacia la etapa autosimilar. Por lo tanto, consideramos que en los experimentos $h \approx h_0$. Así, la pérdida de masa es constante y proporcional al espesor de la capa permeable hasta $h \approx \varepsilon$. Para alturas menores, la pérdida de masa es independiente de ε .

Por otra parte, $dA/dt = u_f dA/dx_f$, $A = hx_f$ y $u_f = F\sqrt{g'h_0}$. Resolviendo la ecuación diferencial (12), obtenemos:

$$A = A_0 \left[1 - \alpha \frac{(x_f - x_0)}{x_0} \right], \quad (13)$$

donde:

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\kappa}{\nu F} \sqrt{g'_0 h_0} \frac{x_0}{A_0} & \text{para } h < \varepsilon \\ \frac{\kappa}{\nu F} \sqrt{g'_0 h_0} \frac{\varepsilon}{h_0} \frac{x_0}{A_0} & \text{para } h \geq \varepsilon \end{cases} \quad (14)$$

III. DESCRIPCIÓN DE LOS EXPERIMENTOS

Las CG fueron generadas en un tanque de 3.0 m de largo, 0.2 m de ancho y 0.6 m de alto, con paredes laterales de acrílico transparente que facilitan la observación de los flujos. Sobre un lado del tanque se dispone un panel de tubos fluorescentes detrás de una pantalla difusora de luz de modo de proveer un fondo uniformemente iluminado. Una video-cámara analógica

COHU 4910 colocada a 6.0 m del otro lado del tanque captura imágenes que son digitalizadas con un *frame grabber Data Translation* de 512×512 píxeles y almacenadas en una computadora personal en tiempo real. La región de interés en la imagen es de aproximadamente 3 m a lo largo y 0.30 m de alto. Empleando un sistema anamórfico de lentes se amplía la escala vertical y se reduce la horizontal por un factor 2 para aprovechar al máximo la imagen capturada. La atenuación de la luz proveniente del fondo iluminado debido a la presencia de colorante verde (común para alimentos E140) en el agua salada permite determinar la concentración promedio de colorante transversalmente a la corriente y con ella la densidad promedio en la misma dirección. Integrando la distribución de densidad calculamos la masa de agua salada presente sobre el MP para distintos tiempos con un error menor del 2%⁽⁶⁻⁸⁾.

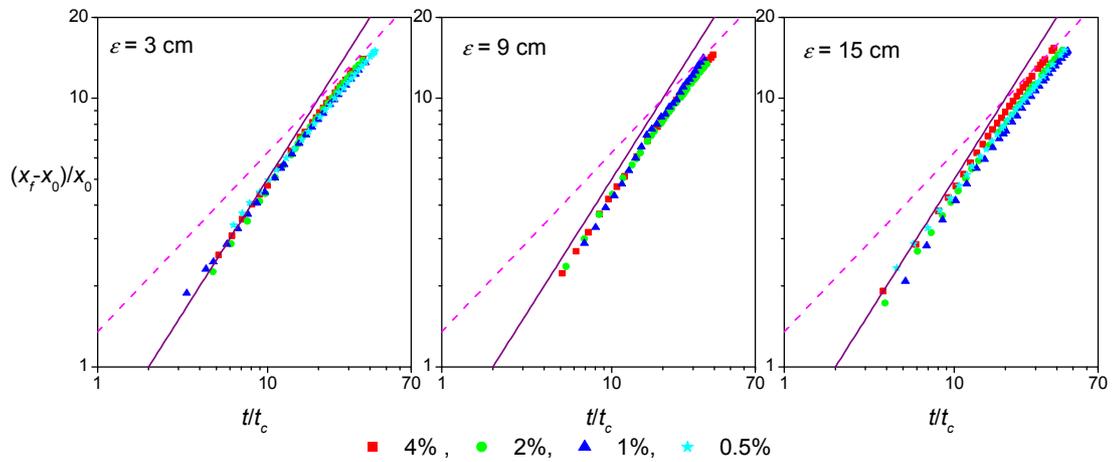


Figura 3: Posición del frente de la CG en función del tiempo, ambos adimensionalizados con los parámetros iniciales. El área inicial ocupada por el fluido denso es $A_0 = 15\text{cm} \times 30\text{cm}$ en todos los casos.

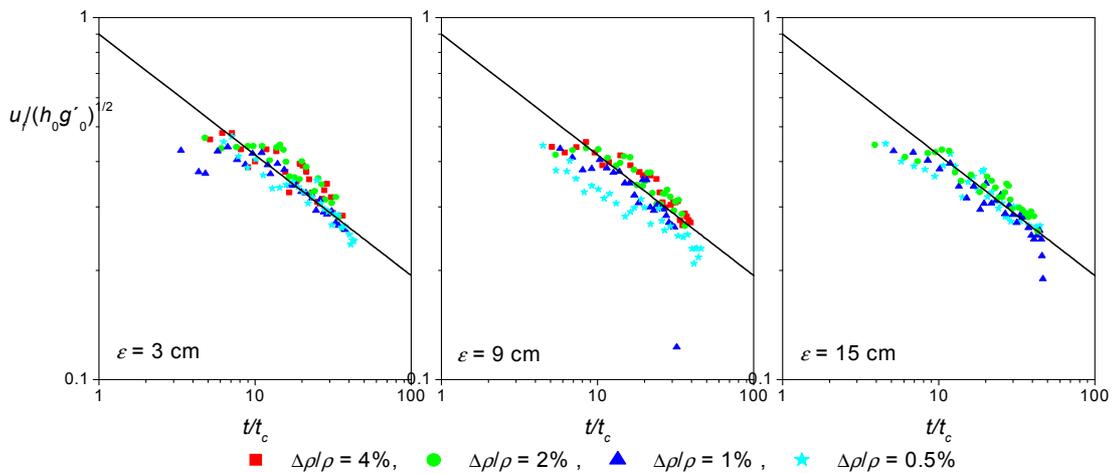


Figura 4: Velocidad del frente de la corriente en función del tiempo, ambos adimensionalizados con los parámetros iniciales. El área inicial ocupada por el fluido denso es $A_0 = 15\text{cm} \times 30\text{cm}$ en todos los casos.

Como puede verse en la Fig. 1, el fluido denso ocupa inicialmente un compartimiento de largo x_0 y altura h_0 mientras el resto del tanque se llena con agua hasta el mismo nivel. El lecho poroso consiste de pequeñas esferas de vidrio de 0.24 cm de diámetro; la permeabilidad del mismo es $\kappa = 6 \times 10^{-5} \text{ cm}^2$ y su porosidad $\phi = 0.375$. El fluido denso es agua salada a la que se le agrega una cantidad conocida de colorante para proveer la visualización del flujo. El experimento comienza cuando la compuerta que separa los fluidos se levanta para dejar fluir al agua salada sobre la parte superior del lecho poroso a través del cual pierde parte de su masa. Se realizaron experimentos variando los valores iniciales de la diferencia relativa de densidad entre los fluidos $\Delta\rho/\rho$ y del volumen liberado por ancho del canal, $A_0 = x_0 h_0$, y el espesor ε del MP. Los parámetros cuya evolución temporal se siguieron fueron la posición del frente, la altura máxima de la zona frontal y la masa de la corriente.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La Fig. 3 ilustra la evolución de la posición del frente de la CG para tres diferentes espesores ε del MP. Para cada caso se realizaron experimentos con distintos valores iniciales de la diferencia relativa de densidad $\Delta\rho/\rho$. Las líneas representan las soluciones correspondientes a CG sobre superficies impermeables. La Fig. 4 muestra la evolución de la velocidad del frente

para los mismos experimentos de la Fig. 3. Se observa que la dinámica del frente no parece ser influenciada por el MP. Las mismas leyes autosimilares que describen la evolución de las CG sobre fondos rígidos siguen siendo válidas para describir la evolución de la posición y velocidad de los frentes en la presente configuración. Esto confirma las hipótesis realizadas en la Sección II.

La Fig. 5 ilustra la evolución de la masa de las CG que se desplazan sobre el MP para diferentes $\Delta\rho/\rho$ y se incluyen los resultados previstos por las Ecs. (13-14). Para pequeñas diferencias relativas de densidad, las variaciones de la masa detectadas están dentro del error experimental. En los gráficos correspondientes a $\Delta\rho/\rho = 2$ y 4 % se observan dos comportamientos diferentes. La pérdida de masa para $\varepsilon = 3$ cm es muy pequeña en las condiciones experimentales mencionadas en la Sección III y los resultados para $m_{ad}(t)$ coinciden con los de las corrientes derramadas directamente sobre un lecho impermeable ($\varepsilon = 0$). Por el contrario, la disminución de la masa para $\varepsilon = 9$ y 15 cm es apreciable, pero no se detectan diferencias significativas entre los resultados de ambos casos, en concordancia con el modelo

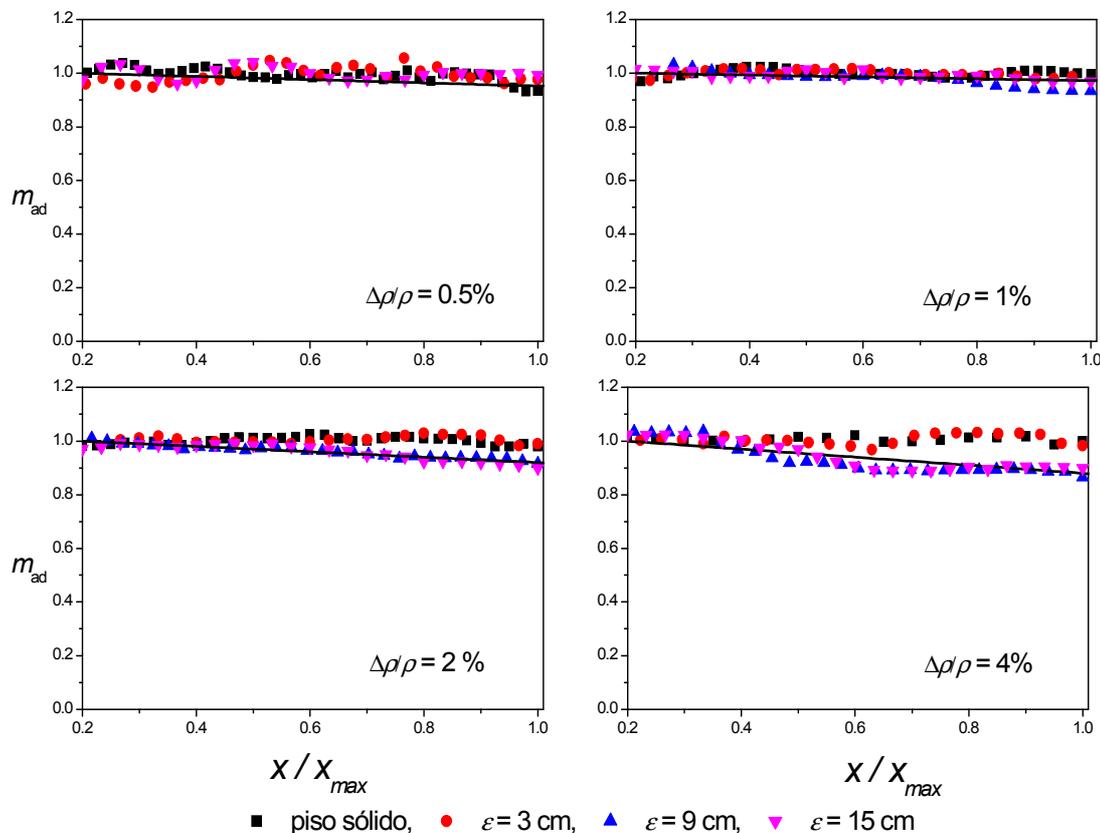


Figura 5. Masa de fluido denso determinado sobre el lecho poroso adimensionalizada con la masa inicial liberada. Las líneas sólidas representan al modelo simplificado de la Sección II.

desarrollado en la Sección II para $h < \varepsilon$. Para un dado espesor, la pérdida de masa es mayor cuanto mayor es la diferencia relativa de densidad inicial como se observa en la Fig. 6. La Fig. 7 muestra que el coeficiente α es proporcional a $\sqrt{g'}$, de acuerdo a la Ec. (14).

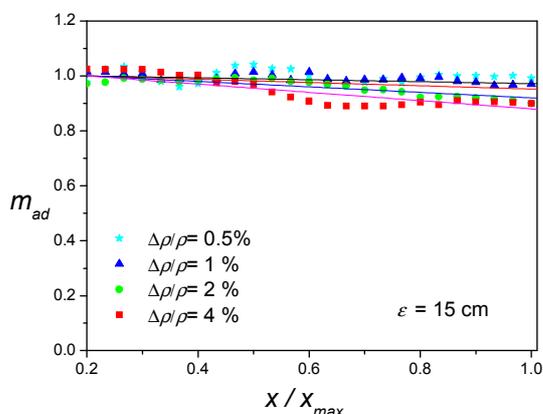


Figura 6. Masa adimensional de fluido denso sobre el lecho poroso para un espesor $\varepsilon = 15$ cm. Las líneas sólidas representan los resultados predichos por el modelo simplificado para cada caso.

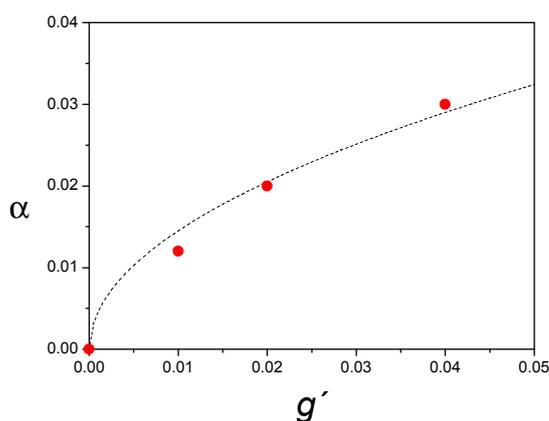


Figura 7. Coeficiente de la Ec. (14) obtenido para los diferentes valores de gravedad reducida. La línea de puntos representa al modelo simplificado de la Sección II.

V. CONCLUSIONES

Se investigó la influencia de un MP profundo sobre corrientes de gravedad inerciales planas a través de experimentos en los que se varió el volumen inicial de fluido denso derramado, la diferencia relativa de densidad entre los fluidos usados y el espesor del MP. En particular, nos concentramos en describir globalmente la evolución de la pérdida de masa de las

CG cuando el lecho reposa sobre una superficie impermeable.

Los resultados experimentales muestran que la posición y la velocidad del frente evolucionan en forma análoga a como lo hacen las corrientes sobre fondos impermeables, donde las etapas inicial y autosimilar están presentes en los resultados obtenidos. Esto sugiere que la pérdida de masa no desempeña un papel significativo durante la evolución de la CG como para modificar su dinámica en las presentes condiciones experimentales. Como consecuencia, la evolución del frente resulta ser un parámetro insensible para compararlo con los resultados de cualquier modelo. En cambio la evolución en el tiempo de la masa, equivalente al área lateral $A(t)$ de la CG, presenta una disminución que se acentúa con la profundidad del lecho y depende de A_0 y g' .

Los resultados indican que la evolución del área lateral A es un buen parámetro para verificar modelos analíticos. Si bien el análisis teórico aquí presentado constituye una buena descripción para las CG que se encuentran atravesando la etapa inicial (caracterizada por velocidad del frente y altura constantes), constituye una primera aproximación a una solución más compleja que contemple una CG en una fase más avanzada. Esto constituirá la siguiente etapa de nuestra investigación.

Agradecimiento

Los autores agradecen al Sr. Pablo Ravazzoli por su activa participación en la realización de los experimentos cuyos resultados se reportan aquí.

Referencias

- 1 – Fannelop, T. K. & Waldman, G. D. AIAA J. **10**, 506-510 (1972).
- 2 – Houtt D. P. Ann. Rev. Fluid Mech. **4**, 341-368 (1972).
- 3 – Gratton, J. & Vigo, C. J. Fluid Mech. **258**, 77-104 (1994).
- 4 – Huppert, H. E. J. Fluid Mech. **121**, 43-58 (1982).
- 5 – Marino, B. M., Thomas, L. P., Diez, J. A. & Gratton, R. J. Coll. Int. Sci. **177**, 14-30 (1996).
- 6 – Thomas, L. P., Marino, B. M. & Linden, P. F. J. Fluid Mech. **366**, 239-258 (1998).
- 7 – Marino, B. M. & Thomas, L. P. J. Hydraul. Eng. **128**, 527-533 (2002).
- 8 – Thomas, L. P., Marino, B. M. & Linden P. F. J. Fluid Mech. **503**, 299-319 (2004).