Desarrollo de un programa para la resolución de un sistema de osciladores armónicos acoplados

Daniel Vega, Rainiero Rainoldi, Luis Ochoa y Sergio Vera*

Departamento de Física, Universidad Nacional del Sur
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca
E-mail: svera@criba.edu.ar

Resumen

El estudio de la dinámica de la transmisión de energía y cantidad de movimiento a través de un medio por ondas y vibraciones es un tema muy importante de la física que requiere de herramientas matemáticas avanzadas (resolución de ecuaciones a derivadas parciales, análisis de Fourier,etc.) sin embargo muchas de las características más importantes de estos problemas pueden enseñarse con la resolución de osciladores armónicos acoplados.

El objetivo de este trabajo es el desarrollo de un programa que resuelve numéricamente el conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas (por el método de Runge-Kutta) y grafica su desplazamiento. El programa se desarrolló en BASIC, debido a que sus facilidades gráficas mejoran la interacción de los alumnos con el programa.

En este caso se estudiaron las oscilaciones transversales debido a su mejor visualización gráfica.

Abstract

The study of energy and momentum transmission through a medium by waves and vibrations is a very important subject in Physics. The common treatment requires the use of advanced mathematical tools (solving partial differential equations, Fourier analysis, etc.), however the most important features of these problems could be taught with the aid of coupled harmonic oscillators.

In this paper we have developed a computer program to find numerical solution to the coupled differential equations (by Runge - Kutta method). The oscillators displacement is shown by computer graphics. The program was written in BASIC, because its graphic facilities improves the students interaction with the software.

Only transversal oscillations are presented because its visualization is simple.

Introducción

La motivación de este trabajo fue el desarrollo de un programa para simular el movimiento de las oscilaciones lineales de una cadena lineal de masas y resortes. La propuesta del programa es enseñar a los alumnos sobre movimiento oscilatorio y modos normales, incluyendo como las condiciones iniciales influyen el movimiento.

Este es un tema de la física que los estudiantes encontrarán muchas veces en distintos cursos de física: en mecánica clásica(1), en mecánica estadística(2), electromagnetismo(3) y en cursos de física del estado sólido(4).

* Autor a quién debe dirigirse la correspondencia

Al abordar estos temas, que aparentemente son fenómenos físicos totalmente diferentes, uno se encuentra con conceptos comunes que no hacen más que demostrar la unidad subyacente de la naturaleza y su simpleza a pesar de lo complejas que resulten las teorías que explican estos fenómenos.

Creemos que es muy útil contar con un programa que "resuelva" el problema y nos permita visualizar el comportamiento del sistema sin necesidad de utilizar las herramientas matemáticas clásicas (álgebra lineal, resolución analítica de ecuaciones diferenciales, análisis de Fourier, etc.) ya que podemos introducir los conceptos físicos más relevantes antes de llegar a los cursos más avanzados donde se plantean los problemas con todo su rigor matemático.

Esta idea no es nueva ya que sólo basta ver el esfuerzo formidable que hizo Crawford[5] para llevar a cabo esta tarea. El aporte más importante de este programa es que la experimentación se reemplaza por los métodos numéricos y la visualización gráfica de las soluciones.

Planteo del problema

Consideremos una cadena lineal de ***N*** masas iguales de masa ***m*** conectadas con resortes de constante ***k*** y unidos a paredes rígidas, como se ilustra en la Figura 1.

Fig. 1.- Sistema de masas y resortes

Al plantear el diagrama de cuerpo libre de cada una de las masas sometida a un desplazamiento transversal, siendo ***x*** el desplazamiento horizontal con respecto a la posición de equilibrio, las ecuaciones de Newton de movimiento para las distintas partículas quedan:

$$m\ddot{x}_1 = -k(2x_1 - x_2)$$

$$m\ddot{x}_j = -k(-x_{j-1} + 2x_j - x_{j+1}) \quad j=2,3,\ldots,N-1$$

$$m\ddot{x}_N = -k(2x_N - x_{N-1})$$

La solución analítica de este sistema de ecuaciones es bien conocida y para obtener las frecuencias propias se debe diagonalizar una matriz de *N x N* elementos. En general, la diagonalización de esta matriz requiere de métodos numéricos para la evaluación de sus *N* autovalores. Nosotros proponemos resolver directamente el sistema de ecuaciones diferenciales numéricamente y obtener las características principales del movimiento, frecuencias propias, relación de dispersión, etc., variando las condiciones iniciales.

Solución numérica

El sistema de ecuaciones diferenciales puede ser resuelto por cualquier método para ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales. En particular hemos utilizado el archifamoso método de Runge-Kutta. Este método se aplica a ecuaciones diferenciales de primer orden por lo que hay que definir nuevas variables que transformen las ecuaciones de segundo grado en ecuaciones de primer grado. Este sistema de *2N* ecuaciones diferenciales junto con *2N* condiciones iniciales puede ser resuelto con un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden[6] , cuya fórmula general es

$$y_{j+1} = y_j + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}\right)$$

$$k_1 = h\,f(t_j + y_j)$$

$$k_2 = h\,f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h\,f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h\,f(t_j + h, y_j + k_3)$$

siendo y_j el valor aproximado de x en el tiempo t_j, h el paso del tiempo y f la función que proviene del término de las fuerzas elásticas.

El error de truncado local de este esquema $O(h^5)$ mientras que el error global es un orden menor

Esta implementeción del método de Runge - Kutta tiene muy buena convergencia y nos asegurará un buena estabilidad numérica que nos permitirá trabajar con distintos h

Programa

Este programa es un entorno amigable que simula el comportamiento de osciladores armónicos acoplados, ver Figura 2. Fue realizado en lenguaje BASIC (compilado con el Microsoft QuickBASIC™ 4.5), usando un estilo estructurado y libre de complicaciones que permite agregarle nuevas funciones de manera sencilla.

Mediante comandos simples a modo del DOS, es posible generar distintos sistemas, con gran variedad de condiciones iniciales (incluyendo modos normales). Utilizando las rutinas de cálculo numérico se obtienen las posiciones y las velocidades de cada masa del sistema en un intervalo dado. Con estos datos el programa es capaz de hacer gráficos de posición y/o velocidad de cada masa en función del tiempo, como así también en el espacio de las fases. En caso de necesitar hacer algún tipo de análisis más complejo, el programa puede crear archivos con formato compatible con otros programas comerciales de matemática como por ejemplo el MathCad™, Matlab™, etc.

Provee además la capacidad de mostrar una representación animada del sistema gobernada por un versátil e intuitivo control de animación. Usando el ratón el usuario puede dejar correr la animación, detenerla, avanzar lentamente o más rápidamente, etc. Esto da una completa idea del movimiento y resulta ser muy didáctico.

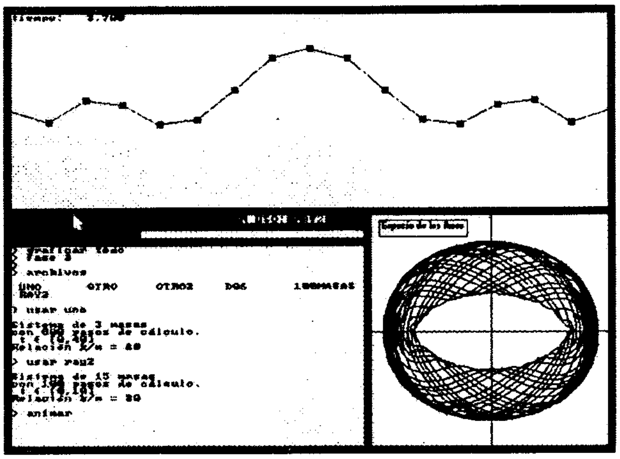

Figura 2.- Pantalla del programa

Resultados y discusiones

La propuesta es la siguiente:

- elija una cantidad de masas,
- dé valores a los parámetros k y m,
- elija un intervalo y el paso de tiempo,
- determine las condiciones iniciales

el programa está listo para graficar $x(t)$, $v(t)$, el espacio de las fases y la animación del movimiento.

El primer tópico a resaltar es que mediante el uso del programa el docente puede mostrar el comportamiento de los osciladores armónicos acoplados haciendo uso de la animación. Esto es posible ya que los modos normales de oscilación pueden ser "descubiertos" como casos particulares del movimiento del sistema producidos con ciertas condiciones iniciales.

Con la visualización de $x(t)$ y $v(t)$ se puede ver el desfasaje espacial de las oscilaciones de cada masa.

Al graficar el espacio de las fases podemos introducir el concepto de los sistemas conservativos (cuando el área se mantiene constante) y los no conservativos(con un poco más de esfuerzo se puede llegar a los conceptos de *atractores* y *repulsores*).

Otro tópico a resaltar es que tanto con las oscilaciones mecánicas, como utilizando la analogía con los circuitos *RLC*, se puede pasar de los sistemas con parámetros empaquetados a los sistemas con parámetros distribuidos con sólo aumentar el número de masas y demostrar la unidad entre el estudio de las vibraciones de osciladores armónicos acoplados y la transmisión de ondas en medios continuos.

Luego mediante la descomposición de Fourier se puede mostrar que cualquier movimiento del sistema es la superposición de los N modos normales. Esto se puede realizar haciendo una salida de los datos a un archivo y utilizando algún software comercial para realizar la transformada rápida de Fourier (como por ejemplo con el Matlab™).

Conclusiones

El objetivo del uso del programa es esencialmente didáctico, sólo pretendemos dar una herramienta más a los docentes para la enseñanza de ciertos conceptos . No oscurecer ciertos temas por las dificultades matemáticas de su resolución y resaltar los conceptos físicos. Muchas veces los alumnos creen que entendieron un tema (o no) porque aprendieron (o no) su resolución matemática.

La utilización de este tipo de programas se puede extender a muchos otros campos, aquí sólo mostramos éste caso por nuestra fascinación por este tema en particular, pero con sólo modificar la subrutina que introduce al programa las ecuaciones de movimiento, todo el resto se puede utilizar para visualizar las otras soluciones.

Por último deseamos resaltar que con muy poco esfuerzo se les puede enseñar a los alumnos a construir su propio integrador de ecuaciones diferenciales y graficador. Esta práctica los introduciría en los métodos de la denominada "Física Computacional".

Quien desee una copia del programa se la enviaremos a respuesta de correo.

Agradecimientos

Sergio Vera y Daniel Vega desean agradecer al CONICET por el apoyo financiero mediante las becas para investigación.

Referencias

(1) Symon, K., *"Mecánica"*, Aguilar, Madrid (1979)
(2) Reif, F., *"Fundamentals of Statistical and Thermal Physics"*, McGraw-Hill Book Co., New York (1965)
(3) Feynman, R. P., *"Física" vol. 2*, Addison - Wesley, México D.F (1987)
(4) Kittel, Ch., *"Introduction to Solid State Physics"*, John Wiley & Son, New York (1966)
(5) Crawford, F. S., *"Ondas", Berkeley Physics Course vol. 3*, Reverté, Barcelona (1979)
(6) Press, W.; Teukolsky, S.; Vetterling, W. and Flannery, B.; *"Numerical Recipes in Fortran"*, Cambridge University Press, Cambridge (1992)