

DINÁMICA DEL FENÓMENO DE EXTRUSIÓN EN FLUJOS LENTOS NO NEWTONIANOS

Fernando Minotti, Roberto Vieytes y Julio Gratton

INFIP, CONICET-Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina.
e-mail: fernando@infip.lfp.uba.ar

En este trabajo se estudia el problema de la extrusión de un líquido muy viscoso con reología no newtoniana. Se obtienen soluciones válidas en el entorno de la desembocadura, que resultan ser autosimilares de segunda especie.

INTRODUCCIÓN

El fenómeno de la extrusión de un líquido muy viscoso a la salida de un conducto no se comprende todavía en muchos de sus detalles. La razón esencial es que al mismo contribuyen causas muy diversas como los sutiles balances de esfuerzos viscosos y gradientes de presión cerca de la desembocadura, generación de ondas en la superficie libre, etc.. El fin de este trabajo es presentar las soluciones correspondientes al flujo lento viscoso, en estado estacionario, de un fluido con una reología del tipo de Ostwald-de Waele en la inmediata proximidad de la desembocadura. Dado que un fluido de tales características está caracterizado por un solo parámetro dimensional, muy cerca de la desembocadura la ausencia de escalas naturales de longitud y de velocidad conduce a que la solución sea autosimilar de segunda especie¹, con la complicación adicional de tener una superficie libre a determinar. La ventaja de tal solución es que permite analizar en detalle el delicado equilibrio de esfuerzos que es, en parte, responsable del fenómeno de extrusión y que es muy difícil de obtener por otros métodos, incluso observaciones experimentales².

FORMALISMO

Las ecuaciones que describen el flujo lento, estacionario de un fluido de Ostwald de Waele son

$$\nabla p = \nabla \cdot \left[B (\dot{\epsilon}_{lm} \dot{\epsilon}_{lm})^{\frac{1-n}{2n}} \dot{\epsilon} \right], \quad \nabla \cdot v = 0, \quad (1)$$

donde $\dot{\epsilon} = \frac{1}{2}[\nabla v + (\nabla v)^T]$, es el tensor velocidad de deformación, B es la viscosidad cinemática generalizada, n el índice reológico, p la presión dividida por la densidad uniforme,

y v la velocidad. En el entorno de la desembocadura el flujo puede considerarse plano, lo que permite introducir una función de corriente ψ . Empleando coordenadas cilíndricas con origen en la desembocadura, las dos componentes de la velocidad son

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (2)$$

Dado que las condiciones de contorno no introducen parámetros con dimensiones (sólo interesan diferencias de presión, por lo que la presión externa puede considerarse nula) un análisis dimensional elemental conduce a las siguientes expresiones de ψ y de la presión:

$$\psi = Kr^\alpha f(\theta), \quad p = BK^{\frac{1}{n}} r^{\frac{\alpha-2}{n}} g(\theta), \quad (3)$$

donde f y g son funciones sin dimensiones de θ , K una constante con dimensiones determinada por el problema no autosimilar, y α el exponente de similaridad a determinar.

Tomando como nulo el valor de ψ correspondiente al contorno sólido (localizado en $\theta = \theta_w$) y a la superficie libre, es claro que esta última está determinada por la línea (plano en realidad) $\theta = \theta_0$, $f(\theta_0) = 0$. El valor de θ_0 debe determinarse como parte de la solución. Las condiciones de contorno son velocidad nula en $\theta = \theta_w$, y esfuerzos y velocidad normal nulas en $\theta = \theta_0$, esto es $v_r = v_\theta = 0$ en $\theta = \theta_w$, mientras que en $\theta = \theta_0$ es $v_\theta = 0$,

$$-p + B (\dot{\epsilon}_{lm} \dot{\epsilon}_{lm})^{\frac{1-n}{2n}} \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = (\dot{\epsilon}_{lm} \dot{\epsilon}_{lm})^{\frac{1-n}{2n}} \dot{\epsilon}_{r\theta} = 0$$

Usando (3) en la primera de las (1) se llega al siguiente sistema para f y g :

$$f' = k, \quad k' = s + \alpha(\alpha-2)f, \quad (4.a)$$

$$s' = \{2\gamma gh^{1-\beta} - 2(\alpha-1)(\gamma+2)hk - 4\beta(\alpha-1)^2 skk\} / (h + \beta s^2), \quad (4.b)$$

$$g' = \frac{1}{2}(\gamma+2)h^\beta s - (\alpha-1)\beta h^{\beta-1} kh' - (\alpha-1)h^\beta k', \quad (4.c)$$

donde $h = 2(\alpha-1)^2 k^2 + \frac{1}{2} s^2$, $\beta \equiv (1-n)/2n$, $\gamma \equiv (\alpha-2)(1+2\beta)$, y la prima indica derivación respecto de θ . Las funciones auxiliares k y s se introducen para tener un sistema de ecuaciones de primer orden, lo que simplifica su resolución numérica.

Las condiciones de contorno se escriben como $f=k=0$ en $\theta = \theta_w$, y $f=s=0$, $g=(\alpha-1)kh^\beta$ en $\theta = \theta_0$. El valor de k puede elegirse arbitrariamente debido a que distintos valores de k sólo producen un reescalado de las distintas magnitudes, que están siempre determinadas salvo por un factor; los valores de α y de θ_0 permanecen invariables. La condición $f=0$ en $\theta = \theta_w$ expresa el hecho que el contorno sólido es una línea de corriente (velocidad normal nula), mientras que $k=0$ en $\theta = \theta_w$ corresponde a la condición de no deslizamiento.

La solución se obtiene entonces de la siguiente manera: se integra el sistema (4) desde la superficie libre $\theta = \theta_0$ hacia el contorno sólido $\theta = \theta_w$ (el θ_0 puede elegirse arbitrariamente dado que el sistema (4) es autónomo); los valores de las funciones en $\theta = \theta_0$ están completamente determinados una vez que se elige un valor de α , teniendo en cuenta que, como se mencionó más arriba, k puede elegirse arbitrariamente. De esta manera, para cada valor del índice reológico n existe un solo parámetro libre, el exponente α , que debe elegirse para que se satisfaga en algún valor de θ que f y k se anulen simultáneamente, correspondiendo a las condiciones de contorno en el contorno sólido; la diferencia entre el valor de θ en el que esto sucede y el θ_0 elegido proporciona entonces la posición relativa de la superficie libre.

Un punto importante es el rango de validez de la aproximación de flujo lento viscoso. A falta de escalas naturales de longitud y velocidad, que permitan definir un 'número de Reynolds', la importancia relativa de los términos de viscosidad y de inercia (estos últimos despreciados en la aproximación

usada), puede estimarse usando que $\psi \approx r^\alpha$. De esta manera,

$$\frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|}{|B(\dot{\epsilon}_{lm} \dot{\epsilon}_{lm})^{\frac{1-n}{2n}} \dot{\epsilon}|} \approx r^{\frac{n(2\alpha-3)}{\alpha-2-n}} \quad (5)$$

Dado que se intenta describir el flujo cerca de la desembocadura, la aproximación de flujo lento será válida si el exponente de r es menor que uno, esto es,

$$\alpha > \frac{2(n-1)}{2n-1} \quad (6)$$

CASO NEWTONIANO

El caso newtoniano ($n=1$) además de su interés especial, presenta la particularidad de ser totalmente analítico, el sistema (4) se reduce a ($\beta=0$, $\gamma = \alpha-2$)

$$f' = k, \quad (7.a)$$

$$k' = s + \alpha(\alpha-2)f, \quad (7.b)$$

$$s' = 2[(\alpha-2)g - \alpha(\alpha-1)k], \quad (7.c)$$

$$g' = \frac{1}{2}\alpha s - (\alpha-1)k', \quad (7.d)$$

que se reduce a una sola ecuación para f :

$$f^{IV} + [\alpha^2 + (\alpha-2)^2]f'' + \alpha^2(\alpha-2)^2 f = 0, \quad (8)$$

cuya solución general es

$$f = A \sin(\alpha\theta) + B \cos(\alpha\theta) + C \sin[(\alpha-2)\theta] + D \cos[(\alpha-2)\theta], \quad (9)$$

con $\alpha \neq 0, 1, 2$ (si $\alpha=0, 1, 2$ la solución no satisface las condiciones de contorno).

La expresión de g es

$$g = \frac{\alpha^2 f' + f'''}{2(\alpha-2)}, \quad (10)$$

Las condiciones de contorno sobre la superficie libre se escriben

$$f(\theta_0) = 0, \quad f''(\theta_0) = 0, \quad (11.a)$$

$$f'''(\theta_0) + [3(\alpha-1)^2 + 1]f'(\theta_0) = 0, \quad (11.b)$$

Para simplificar el problema conviene tomar el origen de θ en la pared ($\theta_w = 0$), con lo que las condiciones de contorno en la misma son

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad (12)$$

Usando (9) en las (11) y (12) se obtiene un sistema de ecuaciones lineales para las

constantes A, B, C y D . Con la notación $\alpha_1 = \alpha\theta_0$, $\alpha_2 = (\alpha-2)\theta_0$ resulta

$$X_1 = \sin\alpha_1 - \frac{\alpha}{\alpha-2} \sin\alpha_2, \quad (13.a)$$

$$X_2 = \alpha^2 \sin\alpha_1 - \alpha(\alpha-2) \sin\alpha_2, \quad (13.b)$$

$$X_3 = -\alpha^3 \cos\alpha_1 + \alpha(\alpha-2)^2 \cos\alpha_2 + \alpha[3(\alpha-1)^2 + 1](\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2), \quad (13.c)$$

$$Y_1 = \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2, \quad (13.d)$$

$$Y_2 = \alpha^2 \cos\alpha_1 - (\alpha-2)^2 \cos\alpha_2, \quad (13.e)$$

$$Y_3 = \alpha^3 \sin\alpha_1 - (\alpha-2)^3 \sin\alpha_2 - [3(\alpha-1)^2 + 1][\alpha \sin\alpha_1 - (\alpha-2) \sin\alpha_2], \quad (13.f)$$

las condiciones para que exista solución no trivial son

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0, \quad (14.a)$$

$$X_1 Y_3 - X_3 Y_1 = 0, \quad (14.b)$$

$$X_2 Y_3 - X_3 Y_2 = 0, \quad (14.c)$$

Estas condiciones dan como resultado

$$\theta_0 = \pi, \quad (15.a)$$

$$\sin[2(\alpha-1)\pi] = 0, \quad (15.b)$$

$$1 + \cos[2(\alpha-1)\pi] = 0, \quad (15.c)$$

De donde se obtiene que $\alpha = q + \frac{3}{2}$, siendo q un número entero. Las soluciones correspondientes son

$$\psi = K r^{q+\frac{3}{2}} \{ \cos[(q+\frac{3}{2})\theta] - \cos[(q-\frac{1}{2})\theta] \}. \quad (16)$$

De todas las soluciones del tipo (16) sólo aquella con $q = 0$ corresponde al caso en que f se anula sólo donde su derivada también lo hace, lo que significa que no hay puntos en el seno del fluido donde ψ se anule y, por lo tanto, todo el fluido proveniente del interior del conducto se 'derramará' eventualmente (recuérdese que se ha tomado $\psi = 0$ en la pared y en la superficie libre). En general, el valor de q (cuando $q > 0$) es el número de veces que la función de corriente ψ se anula en el interior del flujo, de manera que $q + 1$ es el número de regiones en que queda separado el flujo.

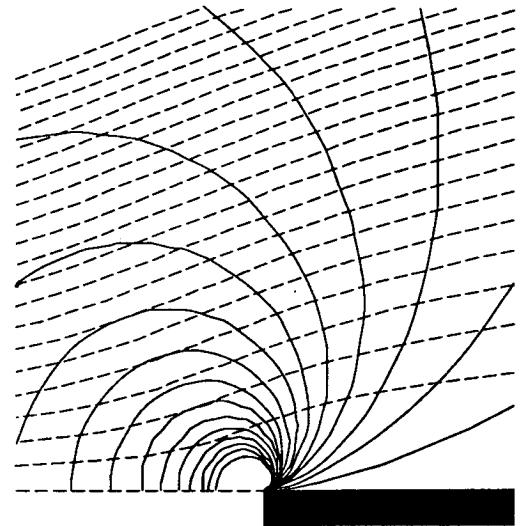


Fig. 1: líneas de corriente (trazos) e isobaras para $\alpha = 3/2$

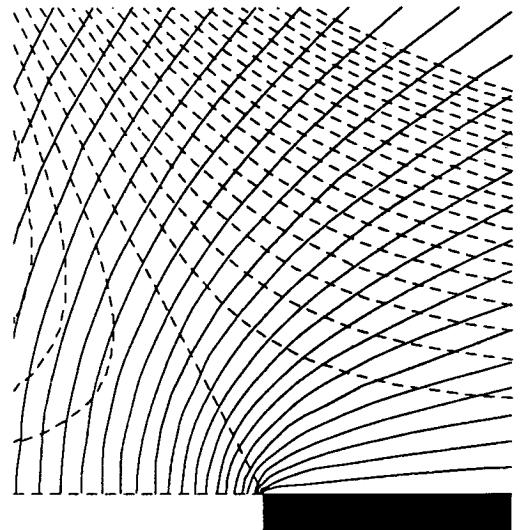


Fig. 2: líneas de corriente (trazos) e isobaras para $\alpha = 5/2$

La solución asintótica para el flujo de extrusión tiene $\alpha = 3/2$ (fig. 1) y es

$$\psi = K r^{3/2} [\cos(3\theta/2) - \cos(\theta/2)], \quad (17)$$

Nótese que el exponente satisface la condición (6) de validez de la aproximación de flujo viscoso lento. Una particularidad de esta solución es que el esfuerzo viscoso sobre la pared diverge al acercarse a la desembocadura como $d^{-1/2}$, siendo d la distancia a la desembocadura, en acuerdo con la asintótica de soluciones conocidas³.

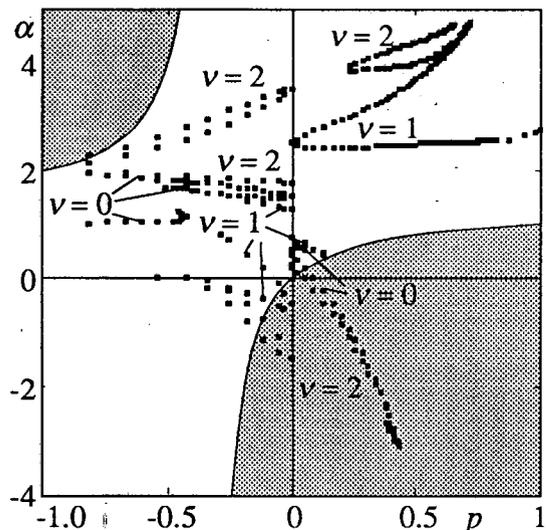


Fig. 3: Espectro de autovalores

Las soluciones con $q = \pm 1, \pm 2, \dots$ (sólo $q \geq -1$ satisface la condición (6)) son la asintótica de flujos más complicados que el de simple extrusión, y representan la interacción de chorros entrantes con un flujo de extrusión (p. e. la figura 2 corresponde a $\alpha = 5/2$ y $f(\theta)$ tiene un cero en el interior del fluido dando lugar a una separatriz).

CASO NO NEWTONIANO

Cuando la reología es no newtoniana ($n \neq 1$), la solución del sistema (4) debe efectuarse numéricamente. En la siguiente figura se muestra el espectro de autovalores α usando como variable independiente a $p = (n-1)/(n+1)$. La zona sombreada indica dónde no se cumple la condición (6), de validez de la aproximación de flujo viscoso lento; el índice v indica el número de ceros de $f(\theta)$ en el seno del fluido.

Los flujos correspondientes presentan contracciones o expansiones de la superficie libre respecto del caso newtoniano. La determinación de la solución que se observa experimentalmente requiere un estudio detallado de la estabilidad de las soluciones.

Este trabajo contó con el apoyo del EC Contract/Grant N^o CTI*CT91-0944.

Referencias

- L. I. Sedov, L. I., Similarity and Dimensional Methods in Mechanics, Academic Press, New York (1959).

C. Allain, M. Cloitre, P. Pierrot y D. Quemada, Eur. J. Mech., B/Fluids 12, 175 (1993).

K. Hutter y V. O. S. Olunloyo, Proc. R. Soc. Lond. A 373, 385 (1980).