

ASINTÓTICA AUTOSEMEJANTE DE FLUJOS VISCOGRAVITATORIOS CON TIEMPO DE ESPERA EN FUNCIÓN DEL PERFIL INICIAL

JULIO GRATTON y CLAUDIO VIGO

INSTITUTO DE FÍSICA DEL PLASMA (INFIP-La) – CONICET,
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES,
UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES, PABELLÓN I, CIUDAD UNIVERSITARIA,
1428 BUENOS AIRES, ARGENTINA.

e-mail: jgratton@tinfiplfp.uba.ar

Se estudian mediante simulaciones numéricas corrientes viscogravitatorias con tiempo de espera producidas a partir de perfiles iniciales en que el espesor del fluido es proporcional a una cierta potencia (p) de la distancia al frente. Para este tipo de condiciones iniciales, Kath y Cohen demostraron teóricamente que: (a) si $p < 2/3$ el frente se pone en movimiento de inmediato (es decir no hay tiempo de espera), (b) si $p = 2/3$ el frente permanece inmóvil por un tiempo finito, (c) si $p > 2/3$ se obtienen soluciones con tiempo de espera en las que aparece un "corner shock" (CS) móvil detrás del frente, que se pone a su vez en movimiento cuando es alcanzado por el CS. Sin embargo, salvo para el caso $p = 2/3$ no hay estimaciones teóricas del tiempo de espera. Este trabajo apunta principalmente a: (1) determinar cómo dependen de las condiciones iniciales el tiempo de espera y la posición y movimiento del CS, (2) determinar la asintótica de la solución en el entorno del frente y cerca del instante en que éste se pone en movimiento para encontrar la relación $\delta = \delta(p)$, esto es, a cuál de las soluciones auto-semejantes de segunda especie LOT (estudiadas en otro trabajo) tiende. Se encuentra que (si $p > 2/3$) sólo se pueden obtener soluciones con $1 < \delta < 13/10$, esto es soluciones LOT tipo \mathcal{L} , pero no se observa la sucesión infinita de "corner shocks" (CS) que se acumulan en el frente, típico de este tipo de soluciones. No es posible para ningún p obtener soluciones con $\delta > 13/10$.

We study numerical simulations of the evolution of waiting-time viscous gravity currents starting from initial profiles such that the depth of the fluid is proportional to a power (p) of the distance to the front. For that type of initial conditions, Kath and Cohen found that: (a) if $p < 2/3$ the front begins to move immediately (there is no waiting time), (b) if $p = 2/3$ the front remains motionless for a finite time, (c) if $p > 2/3$ we obtain waiting time solutions with a moving "corner shock" (CS) behind to the front, that begins to move when it is overtaken by the CS. However, except for the case $p = 2/3$ there are no theoretical estimates of the waiting time. This work focus mainly to: (1) determine how the waiting time and the position and motion of the CS depend on the initial conditions, (2) determine the asymptotics of the solution in the neighborhood of the front and near to the moment when it starts moving, to find the relation $\delta = \delta(p)$, that is, to which of the LOT self similar solutions (studied in another paper) it tends. We find that (if $p > 2/3$) we only obtain solutions with $1 < \delta < 13/10$, that is LOT of type \mathcal{L} , but the infinite series of "corner shocks" (CS) that accumulate in the front, typical of this kind of solutions, is not observed. Solutions with $\delta > 13/10$ are never found.

INTRODUCCIÓN

Las corrientes viscogravitatorias^{1,2,3} (CVG) sobre una superficie plana horizontal y rígida satisfacen una ecuación de difusión no lineal del tipo $h_t = \nabla \cdot (h^m \nabla h)$, con $m = 3$. Por simplicidad trataremos problemas en una dimensión y con simetría plana. Entonces $h_t = (h^m h_x)_x$, que también podemos escribir en la forma $u = h^{m-1} h_x$, $h_t = (uh)_x$ ($h = (g/3\nu)^{1/3} H$, H : profundidad del fluido, x : coordenada espacial, t : tiempo, u : velocidad media, ν : viscosidad cinemática, g : gravedad). Las CVG son un caso modelo, pues se pueden estudiar mediante experimentos simples. La generalización a m cualquiera no presenta dificultades³.

Las ecuaciones no lineales de difusión tienen soluciones con tiempo de espera⁴ (STE), cuyo frente queda inmóvil durante un lapso finito t_w ,

mientras ocurren cambios detrás de él. Para fijar ideas suponemos que el proceso comienza en $t = -t_w$; inicialmente el frente está en $x = 0$: $h(0, -t_w) = 0$ y $h(x, -t_w) \neq 0$ para $0 < x \leq x_0$ siendo h_0 su valor característico; el frente arranca luego de transcurrir un tiempo t_w , es decir, en $t = 0$ (la condición de contorno en x_0 corresponde a una pared: $h_x(x_0, t) = 0$ para $t > -t_w$). La teoría de las STE presenta temas abiertos que comprenden la relación entre condiciones iniciales y tiempo de espera y la asintótica cerca del frente para tiempos próximos al momento del arranque.

Acerca del primer problema se sabe muy poco, más allá de algunos teoremas generales que fijan cotas inferiores^{5,6} para t_w . En el límite $m \ll 1$ y para condiciones iniciales del tipo $h \propto x^p$ se sabe⁵ que el comportamiento de la solución depende de p . Esto se relaciona con la

posibilidad de que se forme un "corner shock" (CS) en la solución (un corner shock designa una discontinuidad débil de h , y por extensión, toda variación rápida de h_x). Si $0 < p < 2/m$, no hay tiempo de espera (el frente se pone en movimiento inmediatamente). Si $p = 2/m$, el frente se mueve luego de un tiempo finito t_w , y en ese instante se forma un CS en el frente (en este caso hay una solución analítica para $t < 0$ que diverge en $t = 0$ y no se puede continuar para $t > 0$). Si $p > 2/m$ el frente arranca luego de esperar un tiempo t_w , pero antes (en $t = -t_s$, $-t_s < 0$) aparece un corner shock en $x = x_s$, que se mueve hacia el frente, el cual se pone en movimiento ($t = 0$) cuando es alcanzado por el CS. Salvo para $p = 2/m$ no hay estimaciones teóricas de t_w ; tampoco se sabe qué pasa si se quita la restricción $m \ll 1$; los resultados experimentales y numéricos son escasos^{7,8}. Cerca de $t = 0$ y en el entorno del frente, o sea para $|x| \ll x_0$, $|t| \ll t_w$, $|h| \ll h_0$, ninguno de los parámetros característicos de las condiciones iniciales interviene en la solución, por lo cual la asintótica de la STE es autosemejante (AS) de II Especie. Soluciones AS con tiempo de espera (soluciones LOT) se conocen hace tiempo⁷ y las estudiamos en detalle en otro trabajo⁸. Son de la forma $h = [x^2 Z(\xi) / t]^{1/3}$, $u = xV(\xi) / t$, $\xi = x / bt^\delta$ ($\lambda = \ln|\xi|$), existen para $\delta > 1$ y son de tres tipos: si $1 < \delta < 13/10$, h y u presentan una estructura consistente de una sucesión infinita de CS, cuyo punto de acumulación es el frente (tipo \mathcal{L}). Si $\delta > 13/10$, las soluciones no tienen CS (tipos \mathcal{E} y \mathcal{N}). Las constantes δ y b no se conocen de antemano sino que dependen de las condiciones iniciales, de una forma hasta ahora desconocida y que sólo se puede conocer estudiando experimental o numéricamente la asintótica del problema de valores iniciales.

En este trabajo obtenemos soluciones numéricas del problema de valores iniciales (no autosemejante) para CVG con simetría plana con perfiles iniciales del tipo $h \propto x^p$ (estas condiciones iniciales permitirán verificar si los resultados teóricos de Kath y Cohen⁵ dependen o no de la restricción $m \ll 1$). Los resultados sobre la dependencia de δ y t_w con p , el movimiento del CS y del frente, la evolución de los perfiles, etc. pueden compararse con los derrames con tiempo de espera estudiados por el grupo del IFIS (UNCPBA, Tandil)⁹. El estudio numérico de la asintótica cerca del frente y próximo al momento del arranque permite determinar la relación entre δ y las condiciones iniciales, y aclarar si

las tres clases de soluciones LOT tienen sentido físico.

ESQUEMA NUMÉRICO

Usando las variables adimensionales $\tilde{h} = h/h_0$, $\tilde{u} = u/u_0$, $\tilde{x} = x/x_0$, $\tilde{t} = t/t_0$; (x_0 : longitud de la corriente, $h_0 \equiv h(x = x_0, t = -t_w)$, $t_0 \equiv x_0^3/h_0^3$, $u_0 \equiv h_0^3/x_0$), la ecuación a resolver es:

$$\tilde{h}_{\tilde{t}} = (\tilde{h}^3 \tilde{h}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} \quad (1)$$

Los perfiles iniciales serán de la forma $\tilde{h}(\tilde{x}, 0) = (p+1)\tilde{x}^p$ ($p > 0$, el factor $p+1$ se elige para normalizar el volumen): el frente está en $\tilde{x} = 0$ y en $\tilde{x} = 1$ suponemos que hay una pared ideal que sostiene al fluido. Nos interesan las soluciones durante el tiempo de espera y también su evolución luego del arranque (en lo que sigue omitiremos las tildes en las variables, pues no ha de producirse confusión).

Discretizamos la (1) usando un esquema implícito de tres niveles que lleva a un sistema de ecuaciones algebraicas a ser resuelto en cada paso temporal. Resolvemos el sistema en forma iterativa con el método de inversión de Gauss-Seidel no lineal incluyendo en el código un proceso correctivo que acelera las iteraciones usando un criterio de convergencia menos estricto¹⁰. Elegimos un método implícito centrado en el tiempo para reducir los errores que pudieran difundirse, como viscosidad numérica en la solución, y así tener perfiles muy precisos sobre todo en la zona entre el frente y el CS. El esquema numérico es de segundo orden centrado en tiempo y espacio. Ponemos $(h_x)^{n+1} \approx (3h^{n+1} - 4h^n + h^{n-1}) / 2\Delta t$, con un error del orden Δt^2 (los superíndices indican el paso temporal). Discretizamos las derivadas espaciales en forma conservativa (para conservar mejor el volumen de la corriente): $[(h^3 h_x)_x]_j^{n+1} \approx \Delta x^{-2} \{ (h^3)_{j+1/2}^{n+1} (h_{j+1}^{n+1} - h_j^{n+1}) - (h^3)_{j-1/2}^{n+1} (h_j^{n+1} - h_{j-1}^{n+1}) \}$, (j indica un punto de una grilla espacial de $N+1$ puntos, los subíndices indican el paso espacial). Así llegamos a un sistema tridiagonal ($j = 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} h_j^{n+1} - \lambda (a_j^{n+1} h_{j-1}^{n+1} - b_j^{n+1} h_j^{n+1} + c_j^{n+1} h_{j+1}^{n+1}) \\ = 2h_j^n - \frac{1}{2} h_j^{n-1} \end{aligned} \quad (2)$$

con $\lambda = \Delta t / \Delta x^2$; $a_j^{n+1} = (h^3)_{j-1/2}^{n+1} \equiv \frac{1}{2} [h_j^3 + h_{j-1}^3]^{n+1}$; $c_j^{n+1} = (h^3)_{j+1/2}^{n+1} \equiv \frac{1}{2} [h_{j+1}^3 + h_j^3]^{n+1}$; $b_j^{n+1} = a_j^{n+1} + c_j^{n+1}$.

La condición de contorno $h_x = 0$ en la pared ($j = 1$) da $(h_2 - h_0) / 2\Delta x = 0$, por lo tanto $h_2 = h_0$ y además $c_1^{n+1} = a_1^{n+1}$, entonces la ecuación discretizada para ese nodo es:

$$\left(\frac{3}{2} + \lambda b_i^{n+1}\right) h_i^{n+1} - 2\lambda c_i^{n+1} h_2^{n+1} = 2h_i^n - \frac{1}{2} h_i^{n-1} \quad (3)$$

y en el último punto de la grilla ($j = N + 1$, donde $h = 0$ siempre) se tiene $h_{N+1} = 0$.

El error en la aproximación de h_i resulta ser $\varepsilon \approx 653(h^2/\bar{x})^5 \Delta t^2$ ($\bar{x} \cong 1$ y $h \cong 1$ son las escalas de x y h) luego $\varepsilon \ll 1$ determina Δt ($\Delta t \ll 0.04$).

Para observar la asintótica se requiere gran precisión cerca de $x = 0$, por lo cual empleamos una grilla espacial del tipo¹¹ $x \propto \xi^2$, $-1 \leq \xi \leq 1$ con $\Delta \xi = 10^{-3}$ (2000 puntos entre $\xi = \pm 1$). Así $\Delta x \approx 10^{-6}$ cerca del frente que espera. La precisión buscada requiere pasos temporales cortos ($\Delta t \approx 10^{-6}$) lo que implica un considerable volumen de cálculo. Por ello usamos la Apollo 750 del INFIP (~40 Mflops), que además permite visualizar los resultados en tiempo real usando las rutinas gráficas Starbase™.

RESULTADOS

Análogamente a lo que ocurre cuando $m \ll 1$, se encuentra que el frente se mueve de inmediato si $p < 2/m = 2/3$; en cambio si $p > 2/3$ se observa el fenómeno de tiempo de espera. Si $p > 2/3$, la evolución temporal de la solución muestra que el perfil se deforma hasta que se forma un CS (esto es, un pequeño intervalo de x donde hay una variación muy rápida de h_x), luego el CS avanza hacia el frente, y cuando llega a él, el frente se pone en movimiento (Figura 1). La formación y evolución del CS se reconoce a partir del comportamiento de h_x y h_{xx} (Figuras 2 y 3). En todas las soluciones con tiempo de espera se forma un CS.

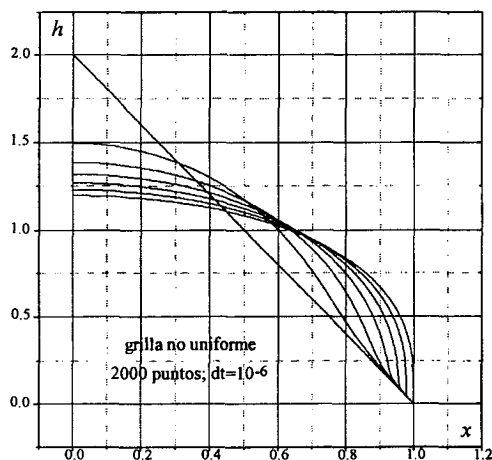


Figura 1: Evolución del perfil durante el tiempo de espera.

Las leyes de movimiento del CS y del frente se representan en los gráficos de $\log x_s$ y $\log x_f$ vs $\log |t|$. Se ve que cuando $|t| \rightarrow 0$ esos movimientos tienden como se esperaba a la asintótica autosemejante ($x_s, x_f \propto t^\delta$). La dependencia de

t_w en p se ve en la Figura 4. Todas las STE estudiadas numéricamente tienen una asintótica AS que corresponde a las soluciones LOT tipo \mathcal{L}^8 , tanto por el valor de δ como por la forma del perfil, que presenta un CS. Para ningún p se obtiene $\delta > 13/10$ ni soluciones sin CS: las asintóticas tipos \mathcal{E} y \mathcal{N} nunca se observan.

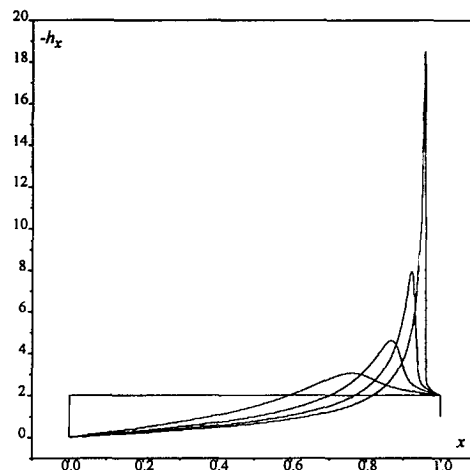


Figura 2: Evolución de h_x durante el tiempo de espera.

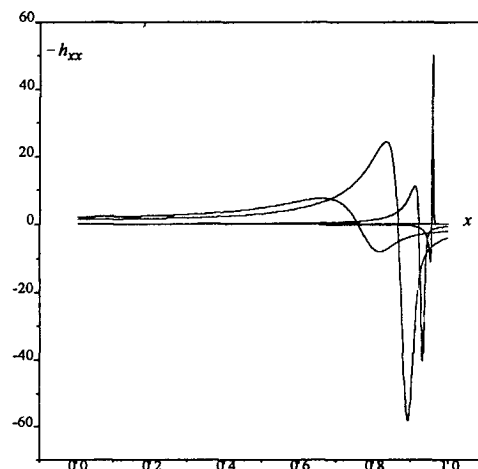


Figura 3: Evolución de h_{xx} durante el tiempo de espera.

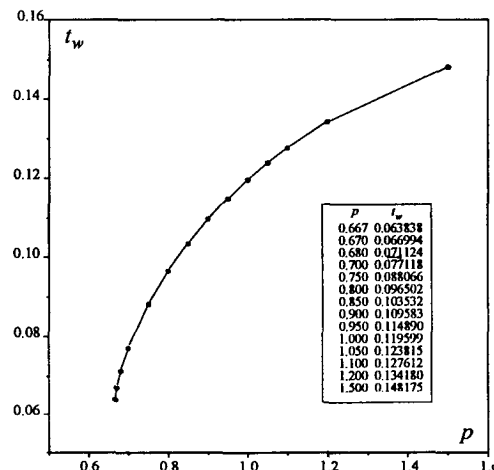


Figura 4: Dependencia de t_w con p .

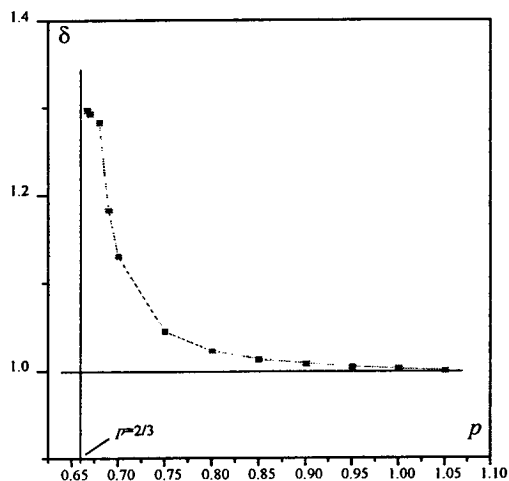


Figura 5: Dependencia de δ con p .

Las soluciones LOT tipo \mathcal{L} tienen una estructura consistente en una serie infinita de CS con punto de acumulación en el frente. Nosotros investigamos si las STE numéricas presentaban una serie de CS, con resultados negativos: con perfiles iniciales del tipo $h \propto x^p$ nunca fue posible observar más de un CS. Aquí corresponde aclarar que los sucesivos CS de las soluciones tipo \mathcal{L} aparecen en escalas espaciales exponencialmente decrecientes. Es difícil revelar una estructura con esa característica en las soluciones numéricas, por lo que el hecho de no observarla podría ser atribuido a limitaciones del método numérico.

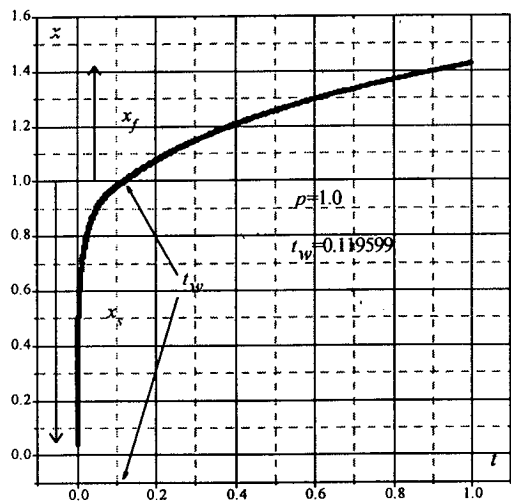


Figura 6: Movimiento del CS y del frente.

Para descartar esta posible explicación desarrollamos otros códigos utilizando diferentes esquemas de resolución (por brevedad omitimos detalles) lo que nos permite afirmar que la aparición de un único CS no se debe a limitaciones numéricas, sino que es una propiedad genuina de nuestras STE, que desde luego depende del

tipo particular de condiciones iniciales elegidas. La discusión de este resultado se da en otro trabajo.⁸

CONCLUSIONES

Nuestra investigación numérica de las CVG a partir de perfiles iniciales tipo $h \propto x^p$ ha permitido obtener los siguientes resultados:

(a) si $p < 2/3$ el frente se mueve de inmediato.

(b) si $p > 2/3$ hay tiempo de espera. Primero el perfil se deforma hasta que se forma un CS, luego el CS avanza hacia el frente, y cuando llega a él, el frente se pone en movimiento. En todas las STE se forma un único CS. La asintótica cerca del frente y próximo al arranque es AS del tipo \mathcal{L} , tanto por el valor de δ como por la forma del perfil (con la salvedad que aparece un sólo CS). Las asintóticas tipo \mathcal{E} y \mathcal{N} nunca se observan.

En consecuencia los resultados teóricos de Kath y Cohen se pueden extender a $m = 3$.

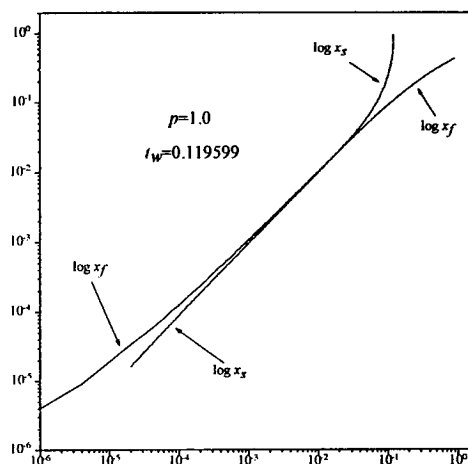


Figura 7: Gráfico log-log del movimiento del CS y del frente.

APÉNDICE

Como t_w no se conoce de antemano, en la práctica los cálculos se efectúan tomando como origen del tiempo el instante inicial y se deja evolucionar la solución hasta que el frente arranca y recorre una distancia apreciable. Una vez determinado el instante t_w del arranque, se redefine la escala de tiempos tomando ese instante como origen (o sea $t \rightarrow t - t_w$).

La posición del CS se define (arbitrariamente) como la coordenada del máximo de h_x . La definición del tiempo de aparición del CS es por supuesto arbitraria, porque siempre hay un máximo de h_x ; nosotros consideramos que se ha formado un CS cuando h_x supera una cota prefijada.

La determinación de t_w depende del criterio utilizado para definir el momento en que el frente comienza a moverse (no es fácil reconocer t_w a partir de la ley del movimiento pues $x_s, x_f \propto t^\delta$ con $\delta > 1$ cuando $|t| \rightarrow 0$). Hemos probado diversos criterios: (a) la aparición de fluido en la celda inmediatamente delante del frente (fijamos arbitrariamente $h_m = 10^{-10}$; si $h > h_m$ se considera que ha llegado fluido a la celda), (b) la aparición de un caudal apreciable en la celda delante del frente, (c) la aparición de una velocidad apreciable. En todos los casos se detectan variaciones de varios órdenes de magnitud de dichas cantidades en el momento del arranque y los diferentes criterios son concordantes, por lo cual finalmente resolvimos usar el criterio (a). La posición del frente después del arranque se determina también mediante un criterio de $h > h_m$.

Hay básicamente dos maneras de obtener δ a partir de la asintótica: (a) a partir del movimiento del CS y del frente, (b) a partir del perfil. La primera se funda en que $x_s, x_f \propto t^\delta$ en el régimen asintótico ($|x| \ll x_0, |t| \ll t_w, |h| \ll h_0$). La segunda se basa en que $h \propto x^{(2-1/\delta)/3}, u \propto x^{1-1/\delta}$ (cuando $t=0, |x| \ll x_0$). En ambos casos hay una arbitrariedad relacionada con la extensión de la región espacial y temporal dentro de la cual se considera que la solución ha alcanzado la asintótica AS. Por ello es difícil lograr una determinación precisa de δ .

Los resultados obtenidos a partir del movimiento del CS y del frente dependen

fuertemente de qué datos se incluyen dentro del intervalo temporal autosemejante (por eso elegimos un paso temporal tan pequeño) y de la precisión con que se determinó t_w . Si p es próximo a 2/3 el CS se forma muy cerca del frente y del instante del arranque, y es muy difícil seguir su evolución, por lo cual el δ obtenido con el primer método es poco preciso.

Este trabajo contó con el apoyo del EC Contract/Grant N° CTI*CT91-0944.

REFERENCIAS

- ¹Buckmaster, J., *J. Fluid Mech.*, **81**, 735, (1977).
- ²Huppert, H. E., *J. Fluid Mech.*, **121**, 43-58, (1982).
- ³Gratton, J. y Minotti, F., *J. Fluid Mech.*, **210**, 155, (1990).
- ⁴Gratton, J., Rossello, E. y Diez, J., *Mon. Ac. Nac. Ciencias Exactas Fis. y Nat.*, **8**, 51, (1992).
- ⁵Kath, W. L. y Cohen, D. S., *Stud. Appl. Math.*, **67**, 79, (1982).
- ⁶Lacey, A. A., Ockendon, J. R. y Tayler, A. B., *J. Appl. Math.*, **42**, 1252, (1982).
- ⁷Thomas, L.P., Diez, J. A., Marino, B. M., Gratton, R. y Gratton, J. *Anales AFA*, **3**, 213, (1991).
- ⁸Gratton, J. y Vigo, C., estos Anales.
- ⁹Marino, B. M. et al, estos Anales.
- ¹⁰Hirt, C. W. y Harlow F., *J. Comp. Phys*, **2**, 114, (1967).
- ¹¹Kálnay de Rivas, E., *J. Comp. Phys*, **10**, 202, (1972).