

# ONDAS DE CHOQUE CONVERGENTES CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS: UNA REVISIÓN

L. E. BILBAO y J. GRATTON

INSTITUTO DE FISICA DEL PLASMA (INFIP-La) - CONICET,  
DEPARTAMENTO DE FISICA, FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES,  
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES, PABELLON I, CIUDAD UNIVERSITARIA,  
1428 BUENOS AIRES, ARGENTINA.

La onda de choque convergente es un problema clásico, pero pese a ello las propiedades de las soluciones son todavía poco conocidas. En este trabajo estudiaremos en detalle las soluciones para choques cilíndricos y esféricos y encontramos algunas llamativas propiedades, no observadas hasta ahora.

The converging shock wave is a classical problem, but the properties of the solutions are still not well known. In this paper we study the details of the solutions for cylindrical and spherical shocks and find some remarkable properties, not noticed in previous works.

## INTRODUCCIÓN

La onda de choque convergente es un clásico ejemplo de autosemejanza (AS) de II Especie.<sup>1-5</sup> Se resuelve postulando que las variables físicas dependen de la variable de semejanza  $\zeta \propto x|t|^{-\delta^*}$  ( $x$ : coordenada,  $t$ : tiempo);  $\delta^*$  se obtiene al resolver un problema no lineal de autovalores. Las propiedades de la solución ( $\delta^*$ , número de Mach asintótico  $M_\infty$ , fuerza del choque reflejado, perfiles...) dependen de la geometría y del exponente adiabático  $\gamma$ . Muchos autores<sup>6-14</sup> calcularon  $\delta^*$  para varios  $\gamma$ , pero otras propiedades no se conocen bien y los pocos datos publicados son imprecisos. Esto justifica investigar mejor las soluciones. Aquí calculamos con precisión  $\delta^*$ ,  $M_\infty$ , etc. para ondas de choque cilíndricas y esféricas para muchos  $\gamma$ , mostramos perfiles típicos y discutimos novedosas propiedades.

## FORMALISMO

Las soluciones AS del flujo adiabático unidimensional de un gas ideal son  $u = (\delta x/t)V(\zeta)$ ,  $z = (\delta x/t)^2 Z(\zeta)$ ,  $\rho = \rho_0 G(\zeta)$ ,  $\zeta = bx|t|^{-\delta}$  ( $u$ : velocidad,  $\rho$ : densidad,  $p$ : presión,  $z = c^2 \equiv \gamma p/\rho$ ,  $\delta = cte.$ ,  $\rho_0, b$  provienen de las condiciones iniciales y de contorno,  $v=1,2,3$  para flujo plano, cilíndrico y esférico, no hay fuerzas externas);  $V, Z, G$  son soluciones de una ecuación autónoma para  $Z(V)$  y dos ecuaciones para  $\zeta$  y  $G$ :<sup>2,15</sup>

$$\frac{dZ}{dV} = -\frac{\Delta_3}{\Delta_1}, \quad \frac{d \ln \zeta}{dV} = \frac{\Delta}{\Delta_1}, \quad \frac{d \ln G}{dV} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad (1)$$

con  $\Delta_1 = (vV - \kappa)Z - V\bar{V}V_\delta$ ,  $\Delta_2 = (vV\Delta - \Delta_1)/\bar{V}$ ,  $\Delta_3 = [(2V_\delta + \bar{\gamma}V)\Delta + \bar{\gamma}\Delta_1]Z/\bar{V}$ ,  $\Delta = \bar{V}^2 - Z$ ,  $\bar{\gamma} = \gamma - 1$ ,  $\kappa = -2\alpha/\gamma$ ,  $\alpha = 1 - \delta^{-1}$ ,  $\bar{V} = V - 1$ ,  $V_\delta = V - \delta^{-1}$ . Las soluciones de la ecuación autónoma

son curvas integrales (CI) del plano  $(V, Z)$ . Una solución AS consta de trozos de las adecuadas CI que describen el flujo en ciertos rangos de  $\zeta$ , los flujos respectivos deben ser empalmados en la frontera de sus dominios. Las condiciones iniciales o de contorno determinan la CI adecuada; para hallarla precisamos el comportamiento de las CI en las singularidades de la ecuación autónoma (son 9 y su posición y naturaleza dependen de  $\delta, \gamma, v$ ). Discutiremos aquellas relevantes para el problema.

La solución AS para  $t=0$  es  $u = u_\infty x^\alpha$ ,  $z = z_\infty x^{2\alpha}$ ,  $\rho = \rho_\infty$  ( $u_\infty = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \delta \zeta^{1/\delta} V(\zeta)$ ,  $z_\infty = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \delta^2 \zeta^{2/\delta} Z(\zeta)$ ,  $\rho_\infty = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \rho_0 G(\zeta)$ ).

Sea  $\Pi$  la parábola sónica  $Z = \bar{V}^2$ . La CI de una solución con sentido físico puede cruzar  $\Pi$  sólo si el punto de cruce es singular (si fuese regular  $\zeta$  sería extremo y  $V, Z$  serían multiformes). Si la CI cruza  $\Pi$  en un punto regular, antes del cruce hay una transición (a  $\zeta = \zeta_S$  fijo) y la solución sigue por otra CI. En un frente de choque  $S$  se pasa de un punto debajo de  $\Pi$  (flujo supersónico delante) a uno encima (flujo subsónico atrás). Para flujos AS las condiciones de Rankine-Hugoniot son:

$$\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{\bar{\gamma} + Q_1}{\gamma_+} = \frac{G_1}{G_2}, \quad \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\bar{\gamma} + Q_1}{\gamma_+} \left( \frac{4\gamma}{\bar{\gamma} Q_1} - 1 \right). \quad (2)$$

aquí  $\gamma_+ = \gamma + 1$ ,  $Q_1 = 2Z_1/\bar{V}_1^2$ ; los sufijos 1,2 indican uno u otro lado de  $S$  y se pueden intercambiar. Las (2) transforman en sí mismos los puntos de  $\Pi$  (que describen perturbaciones que viajan con velocidad  $c$  respecto al gas), puntos arriba de  $\Pi$  se transforman en puntos abajo y viceversa. Para un choque fuerte  $S$  en un gas no perturbado y en reposo ( $1 \rightarrow 0$ ,  $2 \rightarrow S$ ):  $V_0 = 0$ ,  $Z_0 = 0$ ,  $G_0 = 1$  y de (2):  $V_S = 2/\gamma_+$ ,  $Z_S = 2\bar{\gamma}/\gamma_+^2$ ,  $G_S = \gamma_+/\bar{\gamma}$  ( $\alpha_S \equiv \rho_S/\rho_0 = G_S$ ).

Las trayectorias y las características  $C_{\pm}$  ayudan la interpretación. Para flujos AS, la trayectoria  $T$  de una partícula de coordenada  $\zeta(t)$  está dada por  $(d\ln\zeta/d\ln t)_T = \delta\bar{V}$ . Las  $C_{\pm}$  se obtienen de  $(d\ln\zeta/d\ln t)_{C_{\pm}} = \delta(\bar{V} \pm \sqrt{Z})$ . Los puntos de  $\Pi$  (donde  $\zeta = cte.$ ) dan características límite:<sup>16</sup> si  $V < 1$  es una  $C_-$ , si  $V > 1$  es una  $C_+$ .

### CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN

Sea  $S$  una onda de choque fuerte convergente en un gas con densidad uniforme  $\rho_0$ . Nos interesa estudiar el proceso cuando  $S$  está llegando a  $x=0$  y en seguida después del colapso ( $t=0$ ) y sólo queremos el flujo para  $x$  pequeño. Al converger, el choque se refuerza y finalmente la presión del gas delante de  $S$  no influye sobre el flujo detrás. Cerca del colapso y de  $x=0$  se alcanza un régimen asintótico AS: las condiciones iniciales han dejado de ser relevantes y no hay parámetros constantes con dimensiones de longitud o de tiempo (la solución AS vale en una región de tamaño  $L = O(x_s)$  y cerca de  $t=0$ , cuando  $x_s$  es pequeño). Como  $\delta$  (o sea las dimensiones de  $b$ ) no se conoce de antemano, tendremos AS de II Especie.

Si  $\delta$  sale de la construcción de la solución, el valor numérico de  $b$  es indeterminado;  $b$  se obtiene experimentalmente o dejando evolucionar la solución numérica del problema de valores iniciales hasta llegar a la asintótica AS. En este caso, cerca del colapso y del frente de choque se tiende a la solución AS. La forma de la asintótica no depende de las condiciones iniciales, ni del movimiento a distancias grandes, ni de como empezó el proceso, pero las condiciones iniciales determinan el valor de  $b$ .

Para describir el movimiento para  $x \geq x_s$ , la CI empieza en  $(V_s, Z_s)$ , que representa el gas tras el choque fuerte y termina en  $O$  ( $V_0=0, Z_0=0$ ) que representa  $\zeta = \infty$  (se debe poder considerar  $x$  arbitrariamente grande). Cerca de  $O$  la CI describe un flujo con  $\lim_{V \rightarrow 0} VZ^{-1/2} = M_{\infty} = cte.$ ,  $\lim_{V \rightarrow 0} \zeta V^{\delta} = cte.$ ,  $\lim_{V \rightarrow 0} G = \rho_{\infty}/\rho_0 = cte.$

Entre  $S$  y  $O$  la CI debe cruzar  $P$  en una singularidad. Si  $\delta > \delta_+$  ó  $\delta < \delta_-$  (el intervalo útil es  $\delta > \delta_+$ ,  $\delta_{\pm} = [\gamma + 2 \pm \sqrt{(8\gamma)}] / [v\gamma + 2 \pm \sqrt{(8\gamma)}]$ ) hay dos singularidades sobre  $\Pi$  ( $B_+$  y  $B_-$ ,  $V_{B_{\pm}} = (p \pm q)/2\bar{v}$ ,  $Z_{B_{\pm}} = \bar{V}_{B_{\pm}}^2$ ,  $p = \kappa + v - \delta^{-1}$ ,  $q = \sqrt{(p^2 - 4\bar{v}\kappa)}$ ). Sea  $B \equiv B_+, B_-$ ,  $a = (\partial\Delta_3/\partial V)_B$ ,  $b = (\partial\Delta_3/\partial Z)_B$ ,  $c = (\partial\Delta_1/\partial V)_B$ ,  $d = (\partial\Delta_1/\partial Z)_B$ ,  $\Gamma = ad - bc$ ,  $\Lambda = (b+c)^2 + 4\Gamma$ . Si  $\Lambda < 0$ ,  $B$  es foco (centro si  $b+c=0$ ), si  $\Lambda > 0$  y  $\Gamma > 0$  es silla, si

$\Lambda > 0$  y  $\Gamma < 0$  es nodo. Cerca de una silla o nodo las CI son  $ay - (c - \lambda_2)z = \beta[ay - (c - \lambda_1)z]^k$  ( $y = V - V_B$ ,  $z = Z - Z_B$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  son la raíz menor y mayor de  $\lambda^2 - \lambda(b+c) - \Gamma = 0$ );  $\beta$  varía para diferentes curvas,  $k = \lambda_2/\lambda_1$ . Para una silla  $k < 0$ , para un nodo  $k > 0$ . La solución de eje menor (SO) es  $z = ay/(c - \lambda_1)$  ( $\beta = \infty$ ) en el entorno de  $B$ ; la solución de eje mayor (SE) es  $z = ay/(c - \lambda_2)$  ( $\beta = 0$ ). Si la singularidad es silla, éstas son las únicas soluciones que entran a ella. Si es nodo, las soluciones con  $\beta \neq 0, \infty$  (ST) entran a la singularidad tangentes a la SE.

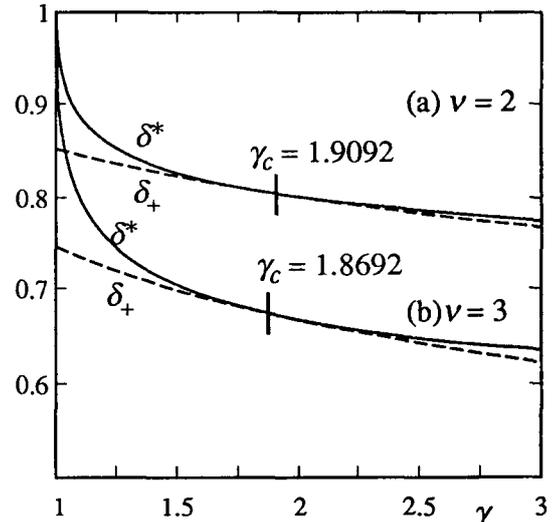


Figura 1. Autovalor  $\delta^*$  (a)  $\nu = 2$ , (b)  $\nu = 3$ .

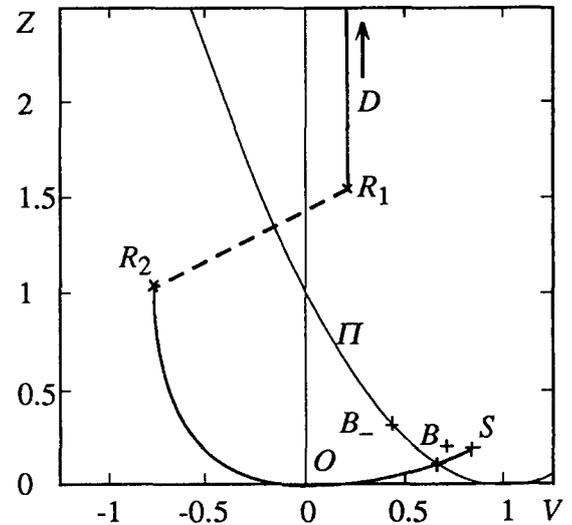


Figura 2. Trayectoria integral ( $\nu = 3, \gamma = 7/5$ )

Si se fija  $\delta$  y se integra desde  $S$ , la curva resultante  $C(S)$  no será en general la solución correcta (no tendrá intersección con  $\Pi$  o la cruzará en un punto regular). Sólo para valores especiales  $\delta = \delta^*$ ,  $C(S)$  cruza  $\Pi$  por  $B_+$  o  $B_-$ , y

puede seguir hasta  $O$ . Esta condición determina  $\delta^*$  (problema no lineal de autovalores).

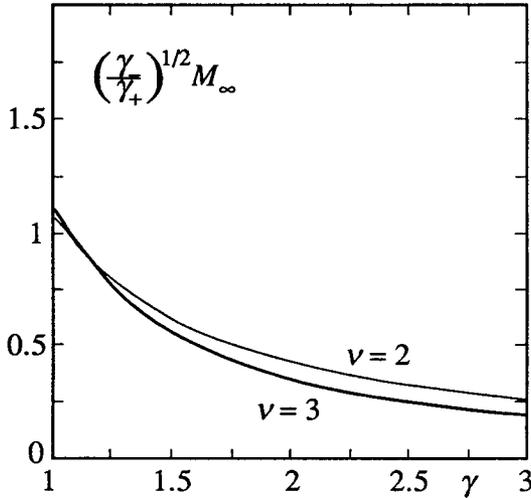


Figura 3. Número de Mach asintótico.

El valor crítico  $\gamma_c$  separa dos casos (si  $v=3$ ,  $\gamma_c \approx 1.87^8$  y  $1.8 < \gamma_c < 1.9^{14}$ ). Si  $\gamma < \gamma_c$  la singularidad relevante ( $B_+$ ) es una silla; sólo la SO puede unir  $B_+$  y  $S$ , con una adecuada elección de  $\delta^*$ . El espectro de autovalores consta de un único  $\delta^*$ . También la continuación  $B_+O$  puede ser sólo la SO. La solución es única, y hay una relación biunívoca entre  $\delta^*$  y  $M_\infty$ . Si  $\gamma = \gamma_c$ ,  $\delta^* = \delta_+$ ,  $q(\delta^*) = 0$ , y  $B_+ \equiv B_-$ . Si  $\gamma > \gamma_c$  la singularidad de interés ( $B_-$ ) es un nodo. Sea  $\delta^*$  el único  $\delta$  para el cual la SO une  $B_-$  y  $S$ . Para  $\delta_+ < \delta < \delta^*$ ,  $C(S)$  llega a  $B_-$  tangente a la SE, sin cruzar  $\Pi$ . El espectro de autovalores es continuo: la cota superior  $\delta^*$  da la SO y el resto da ST; además para cada  $\delta$  del espectro ( $\delta^*$  incluido) se puede continuar de infinitas maneras, ya que para  $B_-O$  se puede tomar sea la SO, sea una ST. Esas continuaciones tienen distintos  $M_\infty$ : el mínimo  $M_\infty$  se tiene con la SO. Llamamos solución 'ordinaria' aquella para la cual  $SB_-$  y  $B_-O$  son la SO (es la solución con máximo  $\delta$  y mínimo  $M_\infty$ ) y soluciones 'extraordinarias' las correspondientes a las demás elecciones de  $\delta$  y  $M_\infty$ . Es usual descartar las soluciones extraordinarias, en base al 'postulado de analiticidad' de Gel'fand y Butler.<sup>6,8,17,18</sup> (el argumento no es muy convincente). De aquí en más consideraremos sólo la solución ordinaria; con esta restricción, para todo  $\gamma$  hay una única solución y un único  $\delta^*$ .

Para obtener la solución luego del colapso ( $t > 0$ ), notamos que la  $C(O)$  correspondiente

debe tener igual  $M_\infty$  que en  $t < 0$  (ahora  $V < 0$ , por lo menos cerca de  $O$  donde el flujo es supersónico). La solución debe llegar a  $x=0$ , representado por la silla  $D$  ( $V_D = \gamma^{-1}$ ,  $Z_D = \infty$ ) donde llega sólo la curva  $C(D)$ . Esta parte del flujo es subsónica y para empalmarla con la parte supersónica se requiere una onda de choque 'reflejada'  $R$ , representada por un salto desde un punto  $R_1$  de  $C(D)$  hasta un punto  $R_2$  de  $C(O)$ . Detrás de  $R$  (punto  $R_1$ ),  $\rho$  alcanza su máximo ( $\rho_m = \rho_0 G_{R1}$ ); en  $R_2$ ,  $\rho_f = \rho_0 G_{R2}$  ( $\rho_m$  y  $\rho_f$  no dependen de  $t$ ).

## RESULTADOS

Calculamos con precisión  $\gamma_c$ , y  $\delta^*$ ,  $M_\infty$ ,  $\rho_\infty$ ,  $\rho_f$ ,  $\rho_m$  para  $v=2, 3$  y  $\gamma$  entre 1.05 y 10 (48 valores) usando varios métodos (Euler, Runge-Kutta, etc.). Todos dan resultados coincidentes a condición de elegir un paso adecuado. Los cálculos se efectuaron con una HP 750.

El autovalor se obtiene por prueba y error, integrando la ecuación autónoma; el cálculo es fácil. Nuestros  $\delta^*$  están en perfecto acuerdo con las referencias recientes. La Fig. 1 muestra  $\delta^*$  para  $v=2, 3$ : se ve que  $\delta^*$  y  $\delta_+$  son muy próximos entre sí<sup>14</sup> para  $\gamma$  alrededor de  $\gamma_c$ . Obtener la solución completa requiere integrar el sistema (1), empalmar las soluciones para  $t < 0$  y  $t > 0$  y determinar el choque reflejado.

En la Fig. 2 se ve la trayectoria integral para  $v=3$ ,  $\gamma=7/5$ ; la solución está dada por  $SB_+O$  para  $t < 0$ , y por los tramos  $DR_1$  y  $R_2O$  para  $t > 0$ . En la Fig. 3 vemos  $M_\infty(\gamma)$ . Los perfiles de velocidad, densidad, temperatura ( $T$ ) y presión para  $t < 0$ ,  $t=0$ ,  $t > 0$  se ven en la Fig. 4 para  $v=3$ ,  $\gamma=7/5$ . La Fig. 5 muestra el movimiento de los choques  $S$  y  $R$  y algunas trayectorias de partículas y características  $C_-$ . En la Fig. 6 representamos  $\zeta_R(\gamma)$ .

Para  $t < 0$  el gas se comprime por el factor  $\alpha_S$  debido a  $S$ , y por el factor  $\alpha_{ad,1}$  debido a la convergencia. Para  $x \rightarrow \infty$ ,  $\rho \rightarrow \rho_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \rho$ . En  $t=0$ ,  $\rho = \rho_\infty$  en todas partes. Para  $t > 0$ , el gas que implota delante de  $R$  se comprime adiabáticamente por el factor  $\alpha_{ad,2} = \rho_f / \rho_\infty$ . La densidad es nula en  $x=0$  y crece hasta  $\rho_m$  detrás de  $R$  (la máxima densidad alcanzada en el proceso). En Fig. 7 vemos los factores de compresión adiabática  $\alpha_{ad,1}$ ,  $\alpha_{ad,2}$  y la razón de compresión del choque reflejado  $\alpha_R = \rho_m / \rho_f$ .

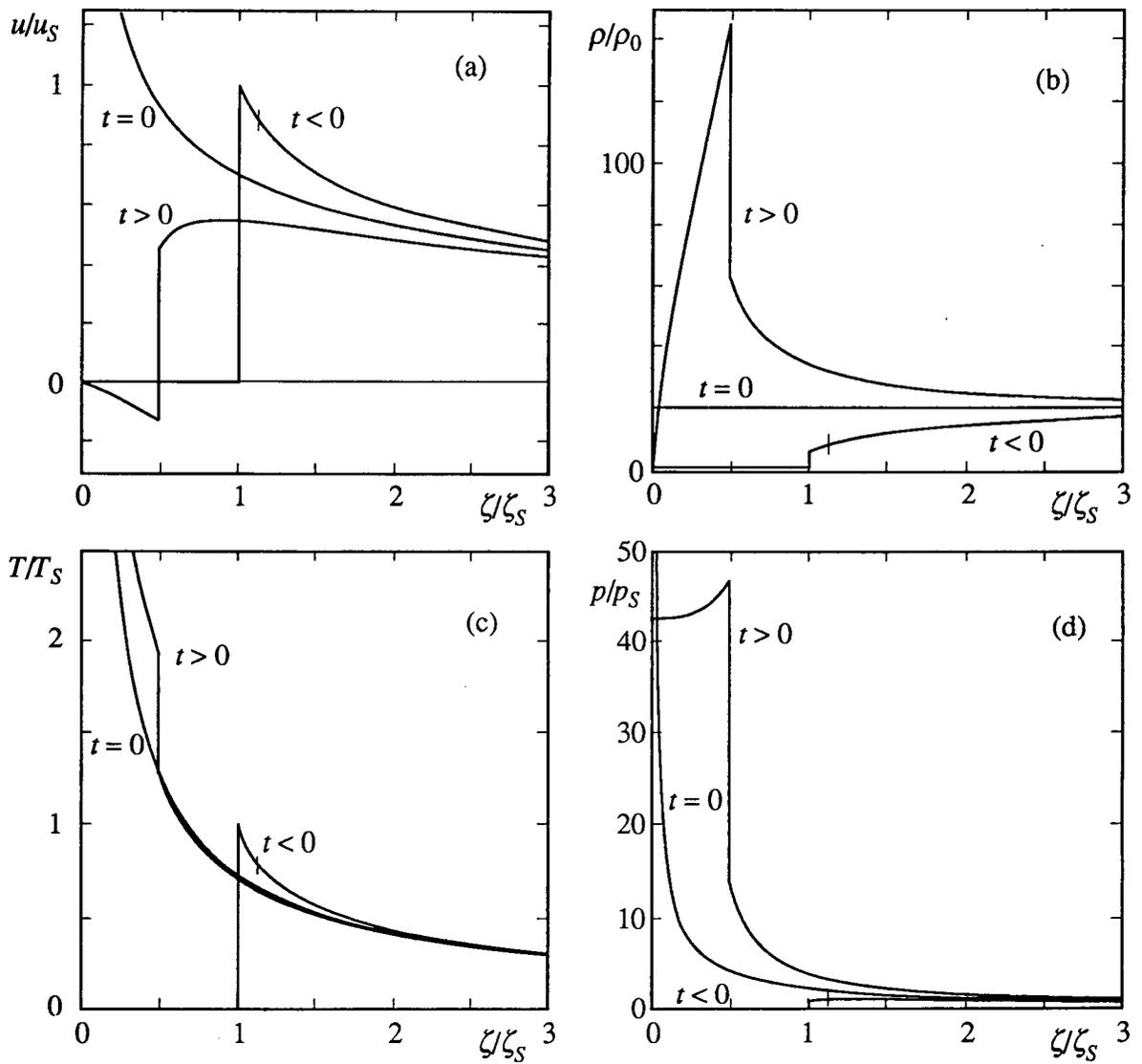


Figura 4. :Perfiles para  $v = 3$ ,  $\gamma = 7/5$ : (a)  $u$ , (b)  $\rho$ , (c)  $T$ , (d)  $p$ . Los trazos sobre los perfiles para  $t < 0$  marcan del punto sónico.

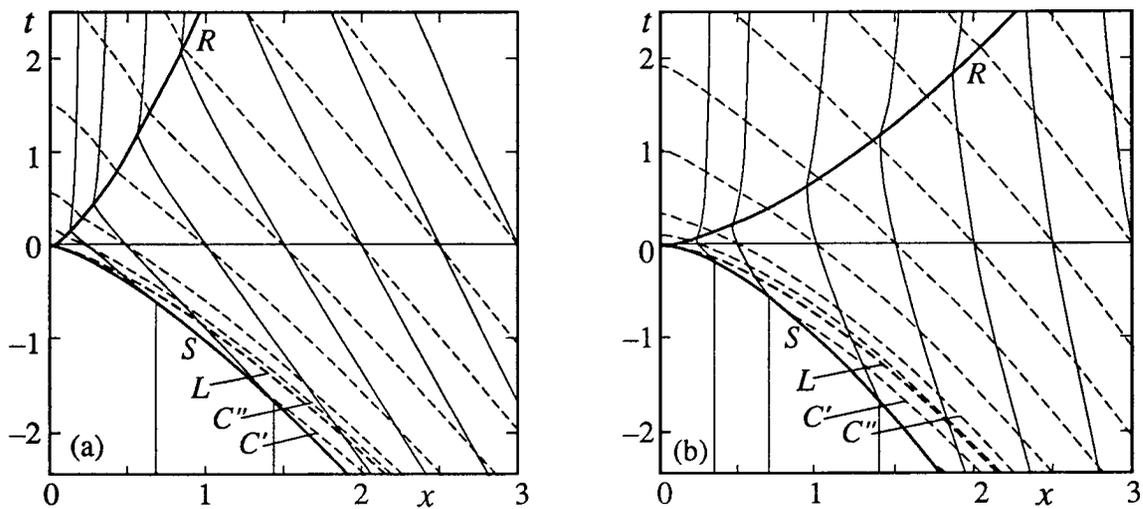


Figura 5. Movimiento de  $S$  y  $R$ ;  $L$ , trayectorias (líneas llenas) y características (líneas de trazos);  $v = 3$ , (a)  $\gamma = 7/5$ , (b)  $\gamma = 3$ .

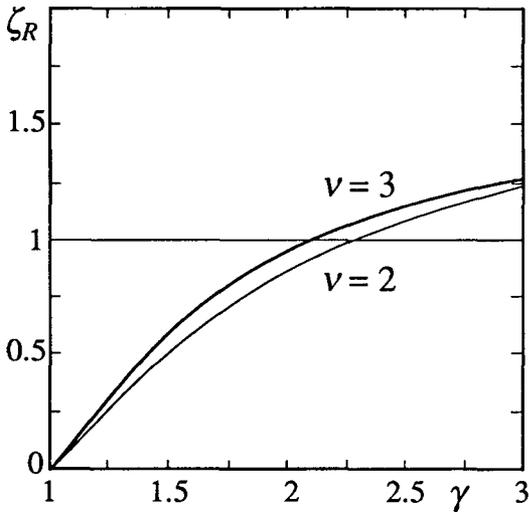


Figura 6. Coordenada AS del choque reflejado.

En Fig. 8 se ve la razón entre la compresión adiabática total  $\alpha_{ad,1}\alpha_{ad,2}=\rho_f/\rho_S$  y la compresión total de choque  $\alpha_S\alpha_R=\rho_S\rho_m/\rho_0\rho_f$ .

Reseñamos algunas propiedades de las soluciones: (a)  $S$  acelera y se refuerza; la energía se concentra cerca del frente a medida que  $T(x_s)$  y  $p(x_s)$  crecen sin límites, pero el tamaño de la región AS decrece para  $|t|\rightarrow 0$  y disminuye la

energía total en ella, (b) si  $\gamma$  es pequeño, el gas implota con velocidad casi constante; el gas detrás de  $R$  se expande mientras el gas delante sigue implotando; al crecer  $\gamma$  éste se frena fuertemente; si  $v=3$ , para  $\gamma \geq 3.101$  aparece un punto de estancamiento delante de  $R$ , (c)  $M_\infty$  decrece al crecer  $\gamma$  (si  $\gamma$  no es muy pequeño,  $M_\infty(v=2) > M_\infty(v=3)$ ), (d)  $\zeta_R$  crece con  $\gamma$  y  $\zeta_R > 1$  si  $\gamma > 2.28$  ( $v=2$ ) o  $\gamma > 2.11$  ( $v=3$ ): a igual  $|t|$ ,  $R$  es más rápido que  $S$ , (e) para  $t > 0$  la presión es casi constante cerca de  $x=0$  y aumenta ligeramente hacia el frente, (f)  $T$  diverge en  $x=0$  para  $t > 0$ ; para  $\gamma$  grande  $T(\zeta)_{t < 0} < T(\zeta)_{t=0} < T(\zeta)_{t > 0}$  salvo justo detrás de  $R$ ; para  $\gamma$  pequeño el orden se invierte, (g) la máxima compresión es infinita para  $\gamma=1$  y decrece al aumentar  $\gamma$ , (h) para  $v=2$ ,  $\alpha_S, \alpha_R$  dominan sobre  $\alpha_{ad,1}, \alpha_{ad,2}$ , además si  $\gamma < 1.47$ ,  $\alpha_{ad,1} < \alpha_{ad,2}$  pero si  $\gamma > 1.47$  ocurre al revés, (i) para  $v=3$  y  $\gamma < 1.17$ ,  $\alpha_{ad,2}$  es el mayor factor de compresión, pero pierde importancia al crecer  $\gamma$ ; si  $\gamma > 1.17$  es menor que  $\alpha_S$ , si  $\gamma > 1.38$  es menor que  $\alpha_{ad,1}$ , y si  $\gamma > 2.75$  es menor que  $\alpha_R$ ; si  $\gamma < 1.25$  predomina la compresión adiabática total, pero si  $\gamma > 1.25$  prevalece la compresión total de choque.

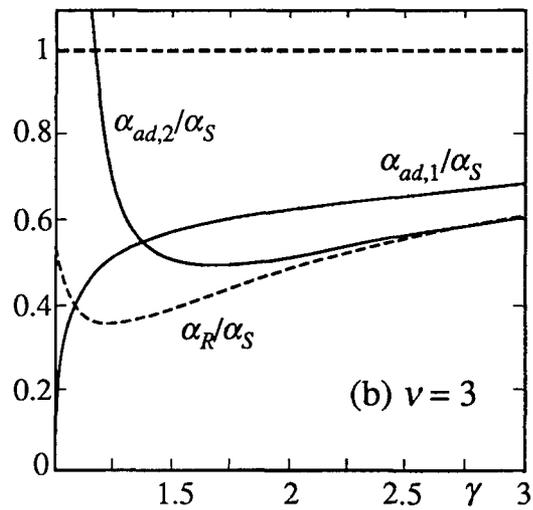
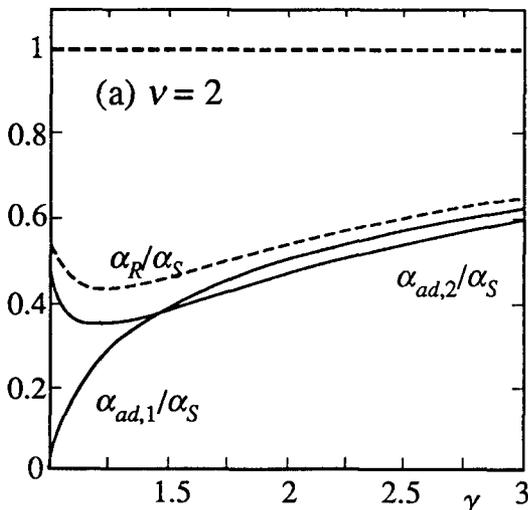


Figura 7. Factores de compresión: (a)  $v=2$ , (b)  $v=3$ .

La característica límite  $L$  (Fig. 6) divide el flujo convergente en dos regiones (I, II). En I (tramo  $SB_\pm$ , puntos entre  $S$  y  $L$ ) el flujo es subsónico y está en contacto causal con el gas en  $x=0, t=0$ ; todas las  $C_-$  intersecan  $S$ ; cuando  $|t|\rightarrow 0$  la fracción de gas dentro de  $L$  tiende a cero pues las partículas cruzan  $L$  pasando a la región II. En II (tramo  $B_\pm O$ , puntos fuera de  $L$ ) el flujo es supersónico y no tiene contacto cau-

sal con el gas en  $x=0, t=0$ , las  $C_-$  llegan a  $x=0$  para  $t > 0$ . Eventuales perturbaciones en II no afectan el colapso.

Para  $t > 0$  el estado del gas en la región central es análogo a una explosión<sup>5,15</sup> porque la acumulación concentra energía en un pequeño volumen (como en el inicio de una explosión), pero la analogía es superficial, por el tipo

diferente de autosemejanza (que conduce a distintos  $\delta^*$  y a movimientos disímiles).

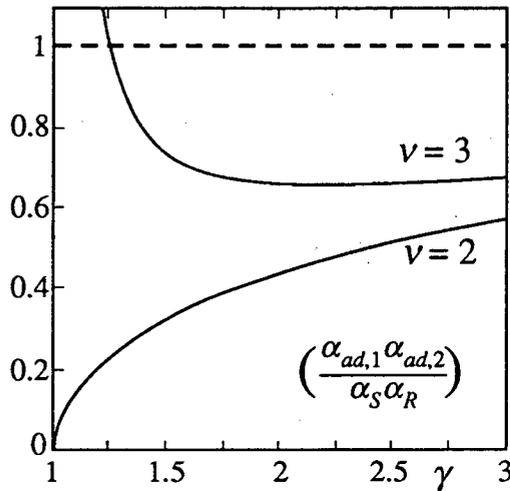


Figura 8. Compresión adiabática y por choque.

### CONCLUSIÓN

Hemos investigado en detalle la solución ordinaria. Los  $\delta^*$  están en buen acuerdo con las referencias. El cálculo de  $M_\infty, \rho_\infty, \rho_f, \rho_m$ , los perfiles, etc. extienden y mejoran los resultados conocidos. Varias propiedades de las soluciones ya se conocían, pero encontramos aspectos novedosos. Los resultados mejoran el conocimiento de las soluciones ordinarias y son de utilidad en las aplicaciones. El rechazo de las soluciones extraordinarias será investigado en un trabajo futuro.

Este trabajo contó con el apoyo del EC Contract/Grant N° CTI\*CT91-0944.

### REFERENCIAS

- 1 G. Guderly, *Luftfahrtforschung*, **19**, 302 (1942).
- 2 Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Academic Press, New York, 1967).
- 3 L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Second Edition, 1979).
- 4 J. Meyer-ter-Vehn, C. Schalk, *Z. Naturforsch.* **37a**, 955 (1982).
- 5 J. Gratton, *Fund. Cosmic Phys.* **15**, 1 (1991).
- 6 D. S. Butler, *Ministry of Supply, Armament Research Establishment, UK, Report 54154* (1954).
- 7 J. P. Somon, J. G. Linhart, H. Knoepfel, *Nucl. Fusion*, 1962 Supplement, Part II, p. 717 (1962).
- 8 K. V. Brushlinskii, Ya. M. Kazhdan, *Usp. Mat. Nauk* **18**(2), 3 (English trans. *Sov. Math. Surveys* **18**, 1) (1963).
- 9 B. H. K. Lee, *Report No. 66-1*, McGill University (1966).
- 10 B. H. K. Lee, *AIAA J.* **5**, 1997 (1967).
- 11 E. B. Goldman, *Plasma Phys.* **15**, 289 (1973).
- 12 R. B. Lazarus, R. D. Richtmyer, *Report LA-6823-MS*, Los Alamos Sci. Lab. (1977).
- 13 M. Rodriguez, A. Liñan, *Report J.E.N. 405*, Junta de Energía Nuclear, Madrid (1978).
- 14 M. Yousaf, *Phys. Fluids* **29**, 680 (1986).
- 15 L. I. Sedov, L. I., *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Academic Press, New York (1959).
- 16 G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley, New York, 1974).
- 17 C. J. Hunter, *J. Fluid Mech.* **8**, 241. (1960).
- 18 C. J. Hunter, *J. Fluid Mech.* **15**, 289 (1963).