

# SOLUCIONES AUTOSEMEJANTES CON TIEMPO DE ESPERA DE ECUACIONES NO LINEALES DE DIFUSIÓN

**JULIO GRATTON y CLAUDIO VIGO**

INSTITUTO DE FÍSICA DEL PLASMA (INFIP-La) - CONICET,  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA, FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES,  
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES, PABELLÓN I, CIUDAD UNIVERSITARIA,  
1428 BUENOS AIRES, ARGENTINA.  
e-mail: jgratton@infip.lfp.uba.ar

Las ecuaciones difusivas no lineales admiten soluciones con tiempo de espera (STE), cuyo frente permanece inmóvil durante un intervalo finito de tiempo antes de avanzar. La asintótica de las STE en el entorno del frente, para tiempos próximos al tiempo de espera es autosemejante (AS) de II Especie. Lacey, Ockendon y Tayler (LOT) demostraron la existencia de soluciones de este tipo y dieron prescripciones para construirlas, pero no estudiaron sus propiedades. En este trabajo estudiamos soluciones para flujos viscogravitatorios con simetría plana y encontramos que pertenecen a tres clases, de acuerdo al valor del exponente de autosemejanza  $\delta$ . El espectro de  $\delta$  es continuo y abarca todo  $\delta > 1$ . Si  $1 < \delta < 13/10$  las soluciones presentan una estructura consistente en una sucesión infinita de comer shocks (CS) cuyo punto de acumulación es el frente. Si  $\delta > 13/10$  las soluciones no presentan CS. Sólo las soluciones con CS tienen sentido físico.

Non linear diffusion equations admit waiting-time solutions (WTS $\equiv$ STE) in which the front remains motionless during some finite period of time before advancing. The asymptotics of the WTS in the neighborhood of the front, for times near to the waiting time, is self similar (SS $\equiv$ AS) of the II type. Lacey, Ockendon and Tayler (LOT) have shown the existence of solutions of this kind given prescriptions for their construction, but did not study their properties. In this paper we make a detailed investigation of these solutions for viscous gravity flows in planar symmetry finding that belong to three classes, according to the value of the self similar exponent  $\delta$ . The  $\delta$ -spectrum is continuous and includes all  $\delta > 1$ . If  $1 < \delta < 13/10$  the solutions show a structure formed by an infinite succession of corner shocks (CS), whose accumulation point is the front. If  $\delta > 13/10$ , the solutions do not show any CS. Only the solutions with CS have physical sense.

## INTRODUCCIÓN

Trataremos la ecuación de difusión no lineal (EDN) en una dimensión y con simetría plana  $h_t = (h^m h_x)_x$  ( $h \equiv h(x,t)$ ,  $m \geq 0$ ) que también podemos escribir en la forma:

$$u = h^{m-1} h_x, \quad h_t = (uh)_x. \quad (1)$$

La (1) gobierna diversos fenómenos: flujos en acuíferos no confinados en la aproximación de Dupuit-Forchheimer<sup>1-3</sup> ( $m=1$ ), flujo de gases en medios porosos<sup>4-6</sup> ( $m=\gamma \geq 1$ ), conducción térmica en un plasma<sup>7</sup> ( $m=5/2$ ), corrientes viscogravitatorias<sup>8-10</sup> (CVG,  $m=3$ ), conducción del calor por radiación en gases múltiplemente ionizados<sup>7,11</sup> ( $m=4.5-5.5$ ) y completamente ionizados<sup>7,12,13</sup> (ondas de Marshak,  $m=13/2$ ), etc.. Las CVG son un caso modelo, pues se pueden estudiar mediante experimentos simples.

La presencia de frentes bien definidos (recordar la velocidad finita de propagación de una onda térmica fuerte) es típica en estos problemas; otra característica es la existencia de soluciones con tiempo de espera (STE), cuyo frente queda inmóvil durante un lapso finito  $t_w$ , mientras ocurren cambios detrás de él. Hay varios trabajos teóricos<sup>14-18</sup> sobre las STE, pero

pocos experimentos<sup>19,20</sup>. Para fijar ideas suponemos que el proceso comienza en  $t = -t_w$ ; inicialmente el frente está en  $x=0$  y  $h \neq 0$  para  $0 < x < x_0$  siendo  $h_0$  su valor característico; el frente arranca en  $t=0$  ( $h(x_0, -t_w) \neq 0$ , la condición de contorno en  $x_0$  corresponde a una pared aislante). Nos interesa la asintótica intermedia de la STE cerca de  $t=0$ , y en el entorno del frente. O sea, estudiaremos el fenómeno para  $|x| \ll x_0$ ,  $|t| \ll t_w$ ,  $|h| \ll h_0$ ; ninguno de los parámetros característicos de las condiciones iniciales interviene en la solución y ésta será autosemejante (AS) de II Especie. Lacey, Ockendon y Tayler<sup>17</sup> mostraron la existencia de estas soluciones (soluciones LOT) e indicaron cómo construirlas, pero no las estudiaron en detalle.

## SOLUCIONES LOT

Hay soluciones AS de (1), que dependen de la variable  $\zeta = x/bt^\delta$  ( $\lambda = \ln|\zeta|$ ), si el problema involucra no más de un parámetro  $b$  con dimensiones independientes,  $[b] = LT^{-\delta}$ . Se conocen muchas soluciones de este tipo<sup>9-11,21-24</sup> pero casi todas son AS de I Especie, en las que  $\delta$  está determinado por los parámetros constantes del problema. En nuestro caso no hay ningún parámetro  $b$ , y  $\delta$  no se conoce de antemano,

sino que resulta de la construcción de la solución. El valor numérico de  $b$  queda indeterminado y se obtiene a partir de la asintótica AS que se observa en experimentos o en la solución numérica de problemas de valores iniciales. La forma de la asintótica no depende de las condiciones iniciales, ni de la solución lejos del frente, ni de como empezó el proceso, pero las condiciones iniciales determinan el valor de  $b$ .

Por brevedad trataremos las corrientes viscogravatorias ( $m=3$ ,  $h=(g/3\nu)^{1/3}H$ ,  $H$ : profundidad,  $u$ : velocidad media,  $\nu$ : viscosidad cinemática,  $g$ : gravedad); la generalización a  $m$  cualquiera no tiene dificultades. Los detalles están en la literatura.<sup>10</sup> Las SA tienen la forma  $h=[x^2Z(\zeta)/t]^{1/3}$ ,  $u=xV(\zeta)/t$  ( $Q=-(2Z+3V)^{-1}$ ). Las curvas integrales (CI) se obtienen integrando una ecuación autónoma para  $V(Z)$ :

$$\frac{dV}{dZ} = \frac{1}{3} \left( \frac{(\delta-V)}{Z} - Q(5V-1) \right) \quad (2)$$

y la dependencia espacial y temporal de  $V$ ,  $Z$  sale de integrar  $d\lambda/dZ=Q$ . Las CI con  $Z<0$  representan soluciones para  $t<0$  y CI con  $Z>0$  dan soluciones para  $t>0$ .

Los aspectos del plano  $(Z, V)$  de interés para las soluciones LOT son las singularidades<sup>10</sup>  $O(0, 0)$ ,  $A(0, \delta)$ ,  $E(\infty, \infty)$  y  $B(-3/10, 1/5)$  y el ciclo límite  $L$  que puede existir alrededor de  $B$ . El punto  $O$  representa  $\zeta=\infty$ ; para  $Z<0$  es una silla donde llega una CI,  $C_O$ , de ecuación  $V=V_O(Z)$  ( $V_O(Z \rightarrow 0) = (\delta^{-1}-2)Z/3$ ) sobre la cual  $\zeta \propto Z^{-\delta}$ ,  $h \propto x^{(2\delta-1)/3\delta}$ ,  $u \propto -x^{(\delta-1)/\delta}$  cerca de  $O$  ( $h, u$  no dependen de  $t$  para  $x \rightarrow \infty$ );  $O$  es nodo para  $Z>0$  y todas las CI convergen a  $V_O(Z)$  para  $Z \rightarrow 0$ . Por la silla  $A$  pasan las CI  $Z=0$  y  $C_A$  dada por  $V \approx \delta + (5\delta-1)Z/12\delta$ ;  $A$  representa un frente móvil en  $x_f (= \zeta_f b t^\delta, \zeta_f = cte.)$ , cerca del cual  $Z=3\delta(1-\eta)$ ,  $h \propto t^{(2\delta-1)/3}(1-\eta)^{1/3}$ ,  $u \propto \eta/t$  ( $\eta = \zeta/\zeta_f$ ). El nodo  $E$  representa  $x=0$  y en su entorno  $V \propto \sqrt{Z}$ ,  $Z \propto \zeta^{-2}$ ,  $h \propto t^{(2\delta-1)/3}$ ,  $u \propto t^{2\delta-1}$ . El punto  $B$  representa  $\zeta=\infty$  si  $\delta < \delta_0$  y un frente fijo en  $\zeta=0$  si  $\delta > \delta_0$  ( $\delta_0 = -13/10$ ); es nodo para  $\delta \leq \delta_-$  ( $\delta_{\pm} = \delta_0 \pm \sqrt{(6/5)}$ ); para  $\delta_- \leq \delta < \delta_0$  es espiral estable (las CI se enrollan hacia  $B$  en sentido antihorario); para  $\delta = \delta_0$  es centro; para  $\delta_0 \leq \delta < \delta_+$  es espiral inestable (las CI se enrollan en sentido horario hacia  $B$ ); para  $\delta \geq \delta_+$  es otra vez nodo. Cerca de  $B$  ( $t < 0$ ) se tiene  $h \propto -(x^2/t)^{1/3}$ ,  $u \propto x/t$ . Si  $\delta=1$ ,  $C_O$  y  $C_A$  coinciden con la curva analítica  $C_{AO}$  dada por  $Z=3V(V-1)$ . Si  $\delta < 1$ ,  $C_A$  se enrolla alrededor de  $B$  dejando  $C_O$  a la izquierda. Para

$\delta > 1$ ,  $C_O$  circula alrededor de  $B$ . Si  $1 < \delta < \delta_0$ ,  $B$  y  $O$  representan  $\zeta=\infty$  y tanto  $C_O$  como las CI que llegan a  $B$  emanan de un ciclo límite  $L$  que representa un frente que espera en  $\zeta=0$ ;  $L$  existe sólo si  $1 < \delta < \delta_0$  y la evidencia numérica muestra que es único. Cuando  $\delta \rightarrow \delta_0$ ,  $L$  colapsa a  $B$  (que si  $\delta = \delta_0$  es centro en la aproximación lineal) y si  $\delta \rightarrow 1$ ,  $L$  tiende a  $C_{AO}$  y al segmento  $OA$  de  $Z=0$ .

Cuando  $t < 0$  el frente está fijo en  $x=0$  y debe ser posible extender la solución hasta  $x$  arbitrariamente grande (hasta  $O$ ). Tales soluciones existen para  $\delta > 1$  y son de tres tipos. Si  $1 < \delta < \delta_0$  la CI emana del ciclo límite (soluciones  $\mathcal{L}$ ). Si  $\delta_0 < \delta < \delta_+$  o sale del nodo (soluciones  $\mathcal{N}$ ) si  $\delta \geq \delta_+$ . El espectro de  $\delta$  es continuo. Para  $t > 0$ ,  $\delta$  es el mismo que en  $t < 0$ ; la solución tiene un frente móvil en  $x=x_f(t) < 0$  y se extiende hasta  $O$ . La trayectoria integral está en  $Z > 0$  y consta de la curva  $AE$ , que da la solución en  $x_f \leq x \leq 0$  y una curva  $EO$  que da la solución en  $0 \leq x < \infty$  (la continuidad de  $h, u$  en  $x=0$  fija  $EO$ ). La escala de  $\zeta$  se fija por convención poniendo  $\zeta_f = -1$ . Por último la solución en  $t=0$  es  $h = z_\infty x^{(2-1/\delta)/3}$ ,  $u = u_\infty x^{-1/\delta}$  con  $z_\infty = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} (b\zeta)^{1/3\delta} Z^{1/3}$ ,  $u_\infty = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} (b\zeta)^{1/\delta} V$ .

## PROPIEDADES DE LAS SOLUCIONES

El comportamiento cerca del frente que espera difiere para los tres tipos de soluciones.

Las soluciones  $\mathcal{L}$  ( $1 < \delta < \delta_0$ , Fig. 1) se caracterizan porque  $Z, V$  oscilan (pero  $h(\zeta), u(\zeta)$  son monotónicos) a medida que la CI se enrolla acercándose a  $L$  ( $\lambda \rightarrow -\infty$ ). Las oscilaciones tienden a ser periódicas en  $\lambda$ , con período  $\ell$  ( $\ell < 0$ ). En cada período  $j$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ ) la CI da una vuelta a  $L$ . En cada vuelta hay un intervalo  $\Delta\lambda \ll |\ell|$  cerca de  $\lambda_j = j\ell$  (la parte de  $L$  más cerca de  $A$ ) donde  $dZ/d\lambda$  y  $dV/d\lambda$  varían rápidamente. Cuando  $\delta \rightarrow 1$ ,  $\Delta\lambda \rightarrow 0$  y  $dZ/d\lambda$  y  $dV/d\lambda$  tienden a ser discontinuas. Llamaremos "corner shock" (CS) a una discontinuidad débil de  $V, Z$ , y por extensión a toda variación rápida de  $dZ/d\lambda$  y  $dV/d\lambda$ .

Los perfiles de las soluciones  $\mathcal{L}$  tienen pues una sucesión infinita de CS que se acumulan en  $\zeta=0$ : el primero está en  $\zeta_0 \approx |\zeta_f| = 1$  y los  $\zeta_j$  siguen una progresión geométrica de razón  $e^\ell$ . Esta estructura es AS (los perfiles correspondientes a sucesivas vueltas de  $L$  difieren sólo en el factor de escala  $e^\ell$ ). El estudio numérico muestra que además de regir el comportamiento lejos del frente,  $O$  gobierna algunos aspectos de

$L$  porque en los intervalos de  $\lambda$  donde  $dZ/d\lambda$  y  $dV/d\lambda$  varían lentamente (en cada vuelta de  $L$ ) los perfiles siguen aproximadamente el comportamiento típico de  $C(O)$ . En cambio la tendencia media de los perfiles está regida por  $B$ . A medida que  $\delta$  crece de 1 a 1.3, disminuyen el valor absoluto de  $\ell$  ( $\ell \approx -4.5$  para  $\delta=1.1$  y  $\ell \approx -2.5$  para  $\delta=1.25$ ), la amplitud de las oscilaciones y la variación de  $dZ/d\lambda$  y  $dV/d\lambda$  en los CS.

Las variables de fase de las soluciones  $\mathcal{E}$  ( $\delta_0 < \delta < \delta_+$ , Fig. 2) tienen oscilaciones que se

amortiguan a medida que la CI se enrolla hacia  $B$ , pero  $dZ/d\lambda$  y  $dV/d\lambda$  nunca varían muy rápidamente. Las oscilaciones de  $h$ ,  $u$  son casi imperceptibles y desaparecen cerca del frente, donde la solución está regida por  $B$ . Lejos del frente la solución está gobernada por  $O$ . Las variables de fase de las soluciones  $\mathcal{N}$  ( $\delta > \delta_+$ , Fig. 3) tienen un comportamiento monótonico que para  $\zeta \rightarrow 0$  está regido por  $B$  y lejos del frente por  $O$ . La transición ocurre para  $\zeta \approx 1$ . Las soluciones  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{N}$  no tienen CS.

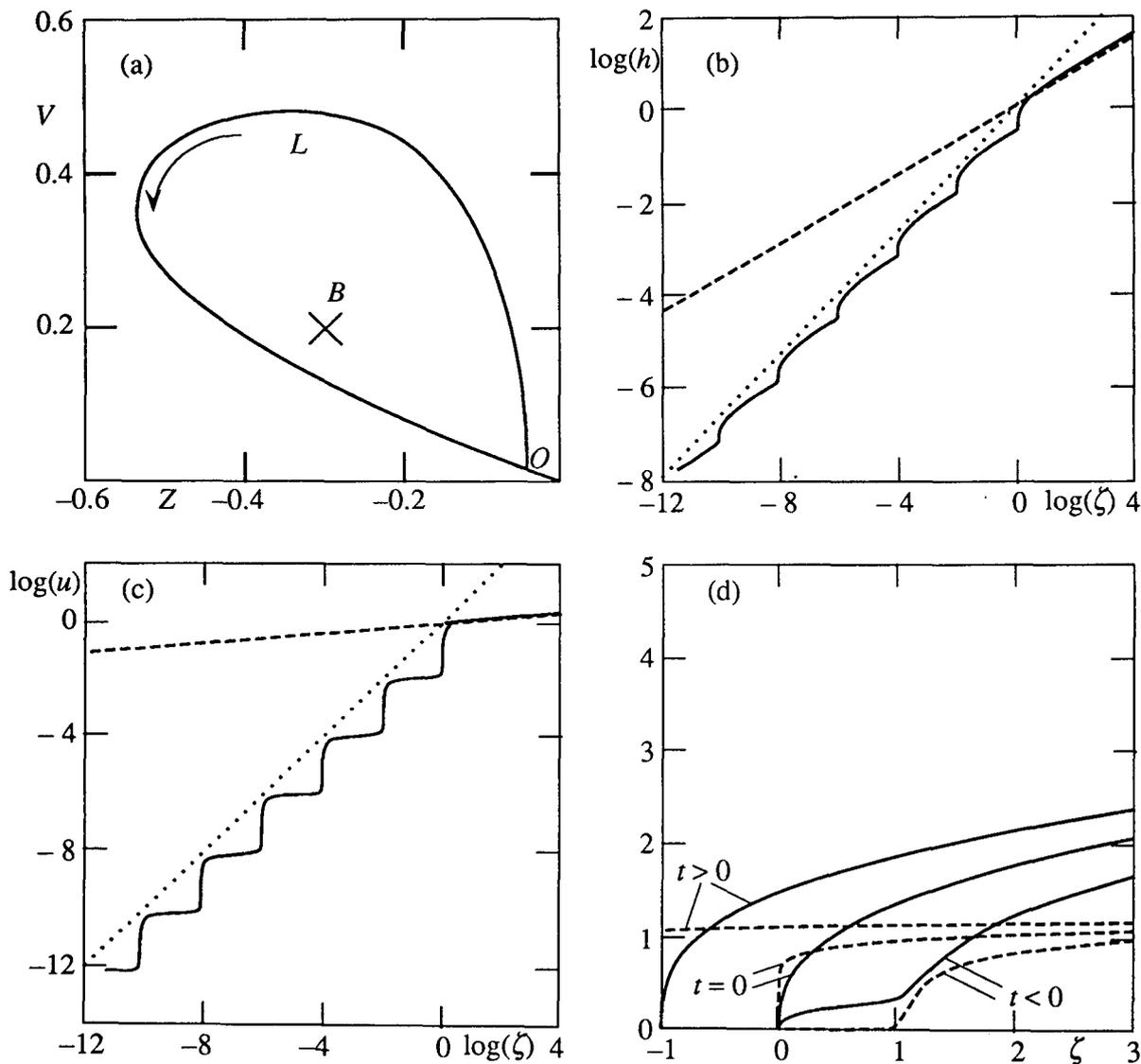


Figura 1. Solución tipo  $L$  ( $\delta = 1.1$ ): (a) curva integral, (b)  $\log h$  vs.  $\log \zeta$  para  $t < 0$ , (c)  $\log u$  vs.  $\log \zeta$  para  $t < 0$ , (d) perfiles de  $h$  (líneas llenas) y de  $u$  (líneas de trazos) para  $t < 0$ ,  $t = 0$  y  $t > 0$ . Las rectas de trazos y de puntos en (b) y (c) indican el comportamiento asintótico de  $O$  y  $B$ .

## SOLUCIONES LOT Y CONDICIONES INICIALES

Hasta aquí no conocemos la relación entre  $\delta$  y las condiciones iniciales del problema, ni sa-

bemos si todos los  $\delta$  del espectro dan asintóticas con sentido físico. Para averiguarlo hay que llevar a cabo experimentos y/o resolver numéricamente el problema da valores iniciales (no

autosemejante) hasta llegar a la asintótica AS. Este es el tema de otros trabajos en que estudiamos numéricamente<sup>25</sup> la evolución de perfiles iniciales que siguen una ley de potencias:  $h(t=-t_w) \propto x^p$  y observamos derrames<sup>19,20</sup> ( $p=1$ ); aquí sólo usaremos algunos resultados. Cuando  $m \ll 1$  (en este caso la EDN se puede aproximar por una ecuación de primer orden no lineal que se resuelve por el método de características) se puede ver<sup>18</sup> que si  $0 < p < 2/m$  no hay tiempo de espera y el frente arranca de inmediato (el caso especial  $p=1/m$  corresponde a un perfil que se desplaza con velocidad constante sin cambio de forma<sup>10</sup>); si  $p=2/m$  el frente arranca después de esperar un tiempo  $t_w$ , y en

ese instante se forma un CS en el frente mismo (en este caso la EDN tiene una solución analítica<sup>10</sup> para  $t < 0$  que diverge en  $t=0$  y no se puede continuar para  $t > 0$ ); si  $p > 2/m$  el frente arranca después de esperar un tiempo  $t_w$ , pero antes se forma un CS que avanza hacia  $x=0$  y llega al frente en coincidencia con el arranque. Luego toda STE (no singular) debe tener por lo menos un CS (puede haber más si el perfil inicial es más complicado que una ley de potencias). No se sabe si estos resultados valen cuando no se cumple  $m \ll 1$ , pero se conjetura que sí, y tanto experimentos como simulaciones numéricas tienden a confirmarlo.

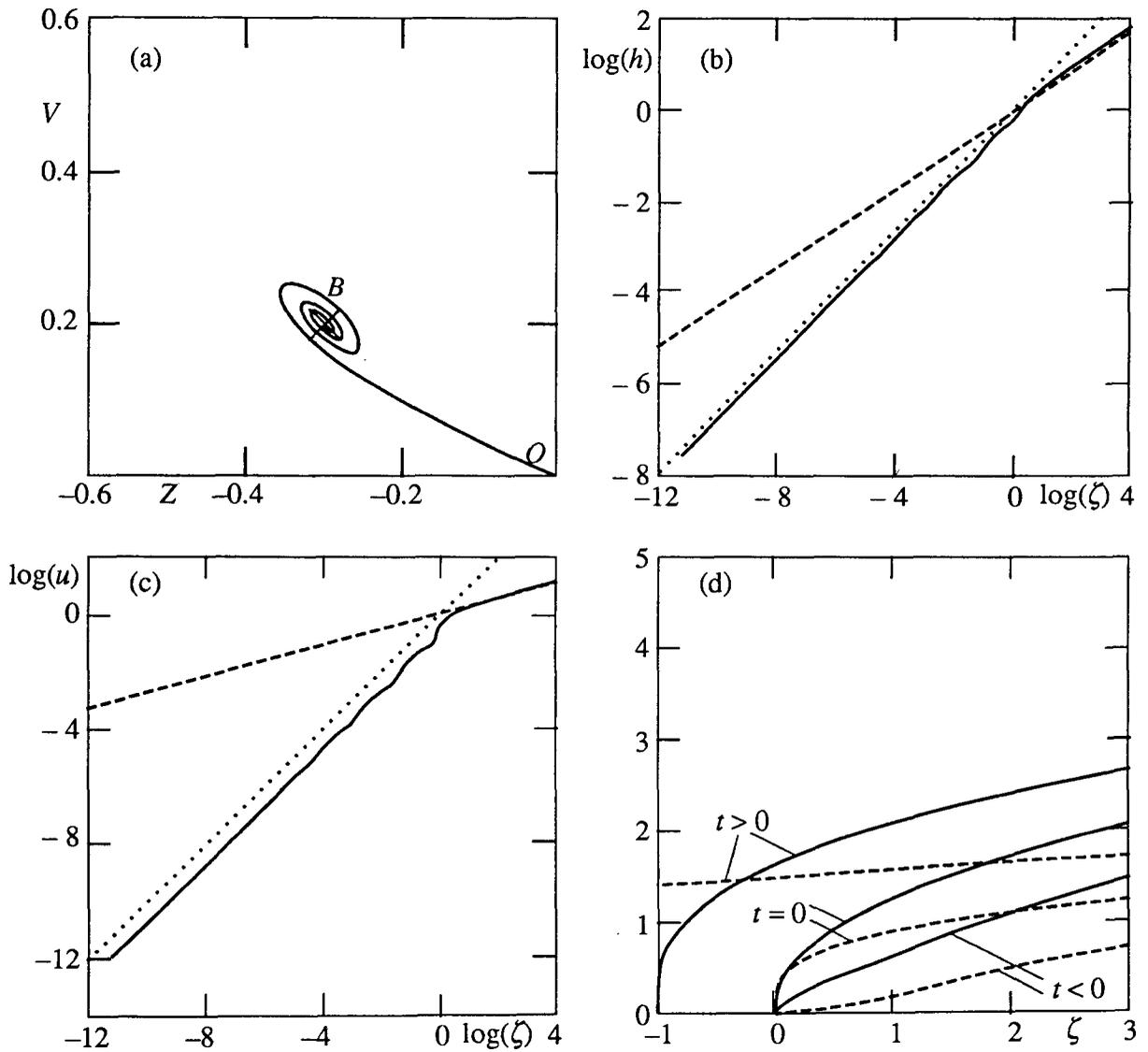


Figura 2. Solución tipo E ( $\delta = 1.4$ ): (a) curva integral, (b)  $\log h$  vs.  $\log \zeta$  para  $t < 0$ , (c)  $\log u$  vs.  $\log \zeta$  para  $t < 0$ , (d) perfiles de  $h$  (líneas llenas) y de  $u$  (líneas de trazos) para  $t < 0$ ,  $t = 0$  y  $t > 0$ . Las rectas de trazos y de puntos en (b) y (c) indican el comportamiento asintótico de O y B

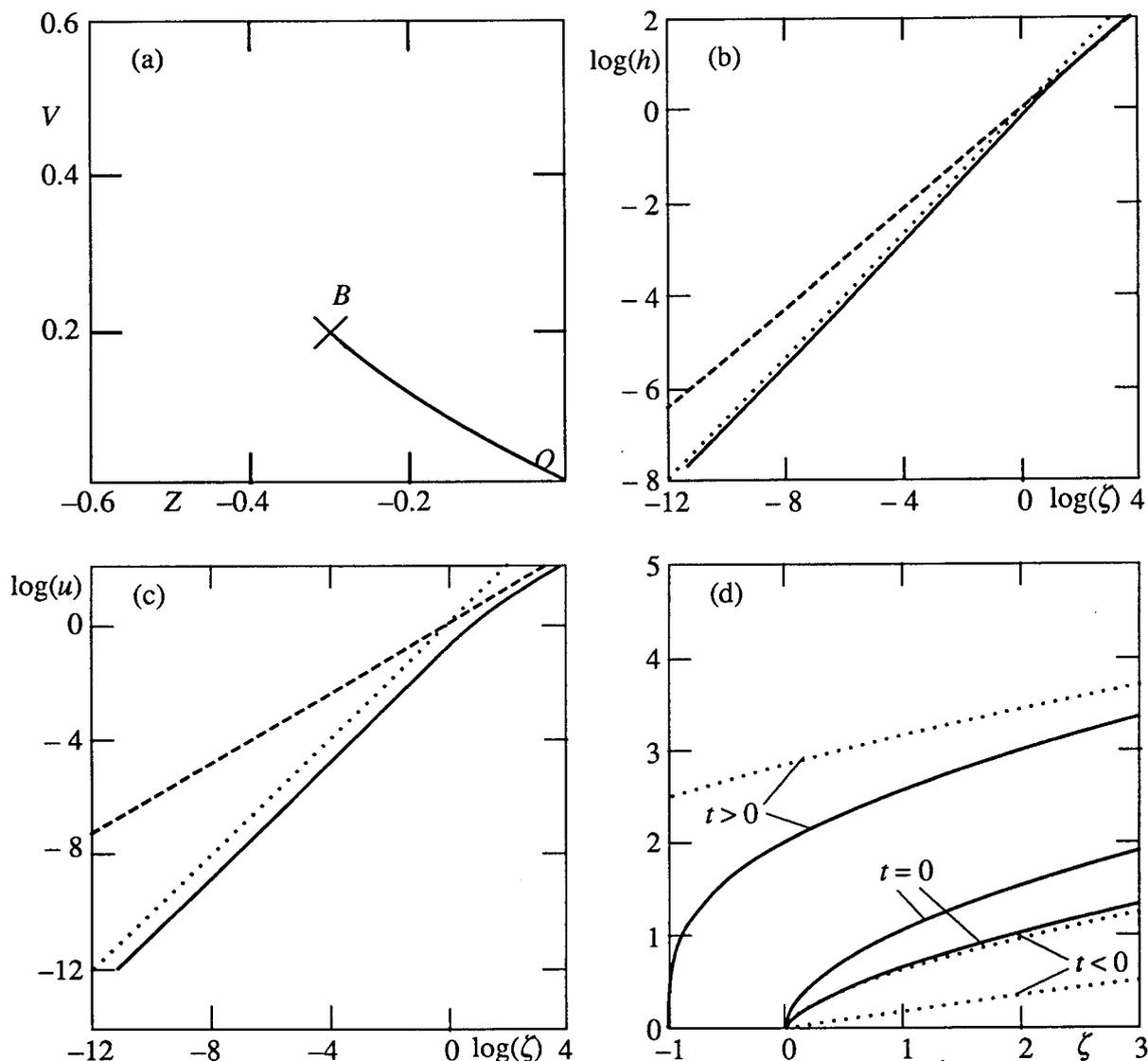


Figura 3. Solución tipo  $\mathcal{N}(\delta = 2.5)$ : (a) curva integral, (b)  $\log h$  vs.  $\log \zeta$  para  $t < 0$ , (c)  $\log u$  vs.  $\log \zeta$  para  $t < 0$ , (d) perfiles de  $h$  (líneas llenas) y de  $u$  (líneas de trazos) para  $t < 0$ ,  $t = 0$  y  $t > 0$ . Las rectas de trazos y de puntos en (b) y (c) indican el comportamiento asintótico de  $O$  y  $B$ .

Las soluciones numéricas ( $m=3$ ) con la condición inicial  $h(t=-t_w) \propto x^p$  y los derrames de rampas lineales muestran que: (a) para  $0 < p < 2/3$  no hay tiempo de espera; (b) para  $p > 2/3$  hay tiempo de espera, la asintótica es AS, pero se forma un sólo CS y no una secuencia como en las soluciones  $\mathcal{L}$ , y  $\delta$  decrece al aumentar  $p$  pero difiere muy poco de 1 (varía de 1.3 para  $p \rightarrow 2/3$  a 1 para  $p \rightarrow \infty$ ); (c) las asintóticas tipo  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{N}$  (sin CS) no se observan nunca.

No hemos considerado todas las posibles condiciones iniciales, pero estos resultados se pueden generalizar. Todo perfil inicial razonable tendrá cerca de  $x=0$  un término dominante del tipo  $x^p$ ; ya vimos que si  $0 < p < 2/3$  el frente se mueve de inmediato y si  $p > 2/3$  debe aparecer un CS antes de moverse el frente.

Luego no hay STE sin CS: ninguna condición inicial puede dar asintóticas  $\mathcal{E}$  o  $\mathcal{N}$ . Este resultado empírico se relaciona seguramente con la inestabilidad de dichas soluciones (sólo las soluciones AS estables representan asintóticas intermedias de problemas de valores iniciales). Hemos comenzado el estudio de la estabilidad de las soluciones LOT (omitimos detalles). El análisis es difícil, pero parecería que el entorno (por lo menos) de  $B$  es inestable, lo que (de confirmarse) implicaría que (por lo menos) la parte de la solución AS que está cerca de  $B$  no puede ser atractor.

Es notable que la asintótica de las corrientes con  $p > 2/3$  es tipo  $\mathcal{L}$  (por el valor de  $\delta$  y la forma del perfil) pero con un sólo CS. En otras palabras, no tienden a la solución  $\mathcal{L}$  para todo  $x$

( $\ll x_0$ ), sino sólo en un intervalo que incluye el primer CS de la serie y excluye los demás (que están más cerca del frente). Este curioso hecho se debe a que la rapidez con que la solución tiende a la asintótica no es igual en todas partes: por (1), la rapidez con que se modifica el perfil es del orden de  $u \propto h^3$  ( $\propto x^{3p}$  para un perfil tipo ley de potencias). Luego cerca del frente la solución numérica tiende muy lentamente a la asintótica AS. Usando la solución aproximada para  $m \ll 1$  obtenida con el método de características (omitimos detalles) se puede ver que el primer CS avanza a lo largo de la corriente y llega al frente antes que tengan tiempo de formarse los siguientes. Es pues razonable que si el perfil inicial es del tipo  $x^p$  sólo se vea una parte de la solución LOT. Pero eso no significa que el resto de la solución no tenga sentido físico, porque nada impide que otras condiciones iniciales y/o de contorno permitan ver más detalles de la estructura. Nosotros estudiamos numéricamente la evolución de un perfil inicial cuya forma es una solución tipo  $\mathcal{L}$  (por razones prácticas de discretización incluimos sólo dos CS): cerca del frente el perfil conservó la forma AS y se mantuvo estable, reteniendo los CS.

## CONCLUSIONES

La asintótica de las STE cerca del frente y próximo al arranque del mismo es AS de II especie, y está descrita por las soluciones LOT tipo  $\mathcal{L}$ . El espectro de autovalores es continuo y comprende el intervalo  $\delta_c < \delta < \delta_0$ ; las condiciones iniciales del problema determinan  $\delta$ . Las soluciones presentan una estructura que consiste de una secuencia infinita de CS con punto de acumulación en el frente, pero debido a que la solución de un problema de valores iniciales tiende a su asintótica más lentamente donde  $h$  es menor, en muchos casos el primer CS en formarse llega al frente antes que tengan tiempo de formarse los demás y sólo se ve parte de la estructura típica de las soluciones  $\mathcal{L}$ . Las soluciones tipos  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{N}$  (que existen si  $\delta > \delta_0$ ) no representan la asintótica de ningún problema real y son probablemente inestables.

Este trabajo contó con el apoyo del EC Contract/Grant N° CTI\*CT91-0944.

## REFERENCIAS

- 1 Polubarinova-Kochina, P. Y., *Theory of Ground Water Movement*, Princeton Univ. Press, 1962.
- 2 Eagleson, P. S., *Dynamic Hydrology*, McGraw-Hill, 1970.
- 3 Peletier, L. A., *Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences, Chap.11. The Porous Media Equation*, Pitman Adv. Pub. Prog., Boston, 1981.
- 4 Muskat, M., *The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media*, McGraw-Hill, 1937.
- 5 Gilding, B. H., y L. A. Peletier, *J. Math. Anal. and Appl.* **55**, 351, 1976.
- 6 Vasquez J. L., *Free Boundary Problems: Theory and Applications, Vol I*, Pitman Adv. Pub. Prog., Boston, 1983.
- 7 Zel'dovich Ya. B. y Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Academic Press, New York, 1966.
- 8 Buckmaster, J., *J. Fluid Mech.* **81**, 735, 1977.
- 9 Huppert, H. E., *J. Fluid Mech.* **121**, 43-58, 1982.
- 10 Gratton, J. y F. Minotti, *J. Fluid Mech.* **210**, 155, 1990.
- 11 Pert, G. J., *J. Phys. A: Math. Gen.* **10**(4), 583, 1977.
- 12 Marshak, R. E., *Phys. Fluids*, **1**, 24, 1958.
- 13 Larsen, E. W. y G. C. Pomraning, *SIAM J. Appl. Math.*, **39**, 201, 1980.
- 14 Aronson, D. G. *SIAM J. Appl. Math.* **19**, 299, 1970.
- 15 Kamin, S., en *Free Boundary Problems*, E. Magenes, ed., Tecnoprint, Roma, 1980.
- 16 Knerr, B. F., *Trans. Am. Math. Soc.* **234**, 381, 1977.
- 17 Lacey, A. A., J. R. Ockendon y Tayler, A. B., *J. Appl. Math.* **42**, 1252, 1982.
- 18 Kath, W. L. y Cohen, D. S., *Stud. Appl. Math.* **67**, 79, 1982.
- 19 Gratton, J., Rossello, E. y J. Diez, *Mon. Ac. Nac. Ciencias Exactas Fis. y Nat.* **8**, 51, 1992.
- 20 estos Anales.
- 21 Barenblatt, G. I., *Prikl. Mat. i Mekh.* **18**, 351, 1954.
- 22 Barenblatt, G. I. y Zel'dovich, Ya. B., *Prikl. Mat. i Mekh.* **21**, 718, 1957.
- 23 Pattle, R. E., *Q. J. Mech. Appl. Math.* **12**, 407, 1959.
- 24 Grundy, R. E., *Quart. Appl. Math.* **37**, 259, 1979.
- 25 Gratton, J. y Vigo, C., estos Anales.