LA INTEGRAL DE CAMINO EN TEORIAS DE CAMPOS NO ABELIANAS CON ALTAS DERIVADAS

A. FOUSSATS, E. MANAVELLA, C.E. REPETTO*, O.P. ZANDRON y O.S. ZANDRON
Instituto de Física Rosario, Universidad Nacional de Rosario,
Bvd. 27 de Febrero 210 Bis, 2000 Rosario, Argentina
e-mail: repetto@ifir.edu.ar

A partir de una densidad Lagrangiana singular en altas derivadas que describe el acoplamiento de materia fermiónica con un campo de "gauge" no abeliano, se construye el formalismo Hamiltoniano. Posteriormente se lleva a cabo la cuantificación canónica. Una vez clasificados los vínculos de este modelo, se estudia la cuantificación mediante el método de la Integral de Camino. Se construye también la diagramática y se dan las reglas de Feynman. Se prueba que a un "loop" la corrección al propagador fermiónico y al vértice dan origen a integrales de Feynman que son convergentes. Se concluye que la inclusión de términos en altas derivadas hacen que el modelo sea menos divergente.

From a singular Lagrangian density containing higher derivatives which describes the fermionic coupling with a non-Abelian gauge field, the Hamiltonian formalism is constructed. The quantization is carried out and by using the path integral method the diagrammatic and the Feynman rules are obtained. The Feynman integrals for the one-loop correction to the fermion propagator and to the vertex are convergent. We conclude that higher-derivative terms added to the Lagrangian improve the ultraviolet behavior rendering the model less divergent.

I. INTRODUCCIÓN

El término de Chern-Simons, tanto en el caso abeliano como en el no abeliano, ha sido considerado desde hace mucho tiempo y con creciente interés. Ello produjo un fuerte impacto en la Física en (2+1) dimensiones, dando origen a distintos tipos de Teorías de Campos clásicas y cuánticas[1–16].

Por otro lado, distintos autores[17–24] han estudiado sistemas dinámicos descriptos por medio de una densidad Lagrangiana singular que contiene términos en altas derivadas. Este tipo de teorías presenta diversos problemas de interés y constituye una rama novedosa en la teoría de campos cuánticos. Relacionado con el carácter en altas derivadas de una teoría, uno de dichos problemas está conectado con la unitariedad de ella[25]. Se sabe, que la unitariedad puede ser violada cuando aparecen los llamados estados "ghost" con norma negativa.

Otro punto para analizar es el problema de la regularización y renormalización. En el marco de una teoría perturbativa, se conoce que la presencia de términos en altas derivadas en la acción mejora el comportamiento de los propagadores a grandes momentos, haciendo que la teoría sea menos divergente[22], lo cual es una característica interesante del modelo. El caso de una teoría de Chern-Simons pertenece a la clase de teorías finitas. Es decir, una vez que la teoría es regularizada se obtiene una cantidad finita, sin necesidad del procedimiento de renormalización. Por supuesto, el costo es la aparición de nuevos vértices en la teoría.

La motivación del presente trabajo es considerar una teoría de Chern-Simons no abeliana que contiene términos en altas derivadas en la acción acoplados con un campo de materia, y llevar a cabo la cuantificación canónica y posteriormente la cuantificación mediante el método de la integral de camino. Será luego interesante construir la teoría perturbativa para el modelo, definiendo apropiadas reglas de Feynman y una adecuada diagramática.

II. FORMALISMO HAMILTONIANO GENERALIZADO Y VÍNCULOS

Se construirá primero el formalismo Hamiltoniano clásico generalizado y luego se llevará a cabo la cuantificación canónica, siguiendo tan de cerca como sea posible el algoritmo de Dirac.

El punto de partida es considerar el campo de materia fermiónica ψ acoplado a teorías de Chern-Simons no abelianas en (2+1) dimensiones, para el campo de "gauge" A_μ del grupo SU(N).

El sistema está descripto por una densidad Lagrangiana singular que contiene términos en altas derivadas y está dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{top} + \mathcal{L}_h + \mathcal{L}_f \tag{2.1}$$

La parte $\mathcal{L}_{top}$ es la densidad Lagrangiana para teorías de "gauge" SU(N) topológicamente masiva, es decir un término de Chern-Simons no abeliano; $\mathcal{L}_h$ contiene los términos en altas derivadas y $\mathcal{L}_f$ es la parte fermiónica (que incluye los términos cinético y masivo). Los campos dinámicos independientes del modelo son: A_μ, $B_\mu = \dot{A}_\mu$, $\psi_{(\alpha)}$ y $\overline{\psi}_{(\alpha)}$. Por medio de la transformación de Ostrogradski[26] se introducen los siguientes momentos canónicos:

$$P^{a\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^a_\mu} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\alpha B^a_\mu\right)} \,, \tag{2.2a}$$

$$Q^{a\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}^a_\mu}\,, \tag{2.2b}$$

$$\overline{\Pi}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} \quad , \quad \Pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\overline{\psi}}}\,, \tag{2.2c}$$

donde los corchetes de Poisson para las variables canónicas conjugadas son las usuales[27]. Estas ecuaciones dan origen a los siguientes vínculos primarios:

$$\phi^{(0)a}(x) = Q^{a0}(x) \approx 0\,, \tag{2.3a}$$

$$\phi^a_{(\alpha)}(x) = \Pi^a_{(\alpha)}(x) - i\left(\frac{a-1}{2}\right)\gamma_0\psi_{(\alpha)} \approx 0\,, \tag{2.3b}$$

$$\overline{\phi}^a_{(\alpha)}(x) = \overline{\Pi}^a_{(\alpha)}(x) + i\left(\frac{a+1}{2}\right)\gamma_0\overline{\psi}_{(\alpha)} \approx 0\,. \tag{2.3c}$$

Utilizando las definiciones de momento, la densidad canónica Hamiltoniana resulta:

$$\mathcal{H}_{can} = B^a_\mu P^{a\mu} + \dot{B}^a_\mu Q^{a\mu} + \dot{\overline{\psi}}^a_{(\alpha)}\Pi^{(\alpha)a} + \Pi^{(\alpha)a}\dot{\psi}^a_{(\alpha)} - \mathcal{L}\,, \tag{2.4}$$

a partir de la cual se puede escribir el siguiente generador de las evoluciones temporales de funcionales genéricos:

$$\mathcal{H} = \int d^2x\,\mathcal{H}_T\,. \tag{2.5}$$

El funcional $\mathcal{H}_T$ es la densidad Hamiltoniana extendida definida por:

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_{can} + \delta^a\phi^{(0)a} + \overline{\lambda}^a_{(\alpha)}\phi^{(\alpha)a} + \overline{\phi}^{(\alpha)a}\lambda^a_{(\alpha)}\,, \tag{2.6}$$

donde δ^a son multiplicadores de Lagrange bosónicos y $\overline{\lambda}^a_{(\alpha)}$ y $\lambda^a_{(\alpha)}$ son fermiónicos.

Siguiendo el algoritmo de Dirac, deben imponerse las condiciones de consistencia sobre los vínculos. Cuando esto se lleva a cabo sobre los vínculos primarios fermiónicos, se determinan los multiplicadores de Lagrange $\overline{\lambda}^a_{(\alpha)}$ y $\lambda^a_{(\alpha)}$. Por otro lado, cuando se imponen las condiciones de consistencia sobre el vínculo primario bosónico $\phi^{(0)a}$, se hallan los siguientes vínculos secundarios:

$$\phi^{(1)a} = -P^{a0} + \mathcal{D}_i Q^{ai} \approx 0\,, \tag{2.7a}$$

$$\phi^{(2)a} = -\mathcal{D}_i P^{ai} - \frac{\kappa}{4\pi}\partial_i A^a_j \varepsilon^{ij} - f^{abc}B^b_i Q^{ci} - f^{abc}A^b_0\mathcal{D}_i Q^{ci} + i f^{abc}\overline{\psi}^b\gamma^0\psi^c \approx 0\,, \tag{2.7b}$$

y la consistencia para $\phi^{(2)a}$ no genera ningún vínculo secundario nuevo.

Calculando los corchetes de Poisson entre vínculos, se concluye que $\phi^{(0)a}$ y $\phi^{(1)a}$ son vínculos de primera clase, correspondiendo a invariancias de "gauge" de la teoría bajo transformaciones locales de "gauge"; mientras que los vínculos $\phi^{(2)a}$, $\phi^a_{(\alpha)}$ y $\overline{\phi}^a_{(\alpha)}$ son de segunda clase.

Al ser impar el número de vínculos de segunda clase, el determinante de la matriz formada por los corchetes de Poisson entre ellos se anula. Por lo tanto, es necesario encontrar una combinación lineal adecuada de vínculos de segunda clase que den origen a otro vínculo de primera clase. La expresión hallada es la siguiente:

$$\Psi^a = \mathcal{D}_i P^{ai} + \frac{\kappa}{4\pi}\partial_i A^a_j \varepsilon^{ij} + f^{abc}B^b_i Q^{ci} + f^{abc}A^b_0\mathcal{D}_i Q^{ci} + f^{abc}\left(\overline{\psi}^b\Pi^c + \overline{\Pi}^b\psi^c\right) \approx 0\,. \tag{2.8}$$

En consecuencia, el conjunto de vínculos de la teoría está dado por:

i) Los tres vínculos de primera clase $\phi^{(0)a}$, $\phi^{(1)a}$ y Ψ^a;

ii) Los dos vínculos (fermiónicos) de segunda clase $\phi^a_{(\alpha)}$ y $\overline{\phi}^a_{(\alpha)}$.

Ahora se construyen los corchetes de Dirac, los cuales permiten eliminar del formalismo a los vínculos de segunda clase, y así se obtiene la cuantificación canónica de Dirac de la teoría. Los corchetes de Dirac para variables $A(x)$ y $B(y)$ se definen como es usual:

$$[A(x), B(y)]^* = [A(x), B(y)]_{PB} - \left[A(x), \psi_{(a)}\right]_{PB} C^{(a)(b)}\left[\psi_{(b)}, B(y)\right]_{PB}\,,$$

donde la matriz $C^{(a)(b)}$ es la inversa de la matriz construida con los elementos $\left[\phi_{(a)}, \phi_{(b)}\right]_{PB}$ que involucran los vínculos de segunda clase. Esto permite tratar a los vínculos de segunda clase como ecuaciones fuertemente cero.

Ahora puede llevarse a cabo la cuantificación canónica del sistema Hamiltoniano vinculado bajo consideración. El Hamiltoniano total del modelo resulta así:

$$\mathcal{H}^*_T = \int d^2x\left(\mathcal{H}_{can} + a\phi^{(0)a} + b\phi^{(1)a} + c\Psi^a\right)\,, \tag{2.9}$$

donde a, b y c son tres parámetros arbitrarios.

III. CUANTIFICACIÓN MEDIANTE LA INTEGRAL DE CAMINO

El sistema en estudio posee vínculos de primera y segunda clase, por lo cual la cuantificación mediante el método de la integral de camino se debe llevar a cabo utilizando una adecuada extensión del formalismo de Fadeev-Senjanovic[28,29]. Para este modelo no abeliano con términos en altas derivadas, se asume que la función de partición está dada por:

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}P^\mu \mathcal{D}B_\nu \mathcal{D}Q^\nu \mathcal{D}\overline{\psi}_{(\alpha)}\mathcal{D}\Pi^{(\alpha)}\mathcal{D}\psi_{(\beta)}\mathcal{D}\overline{\Pi}^{(\beta)}$$
$$\delta(\phi_1)\,\delta(\phi_2)\,\delta(\phi_3)\,\delta(f_1)\,\delta(f_2)\,\delta(f_3)\,\delta\left(\phi_{(\alpha)}\right)$$
$$\delta\left(\overline{\phi}_{(\beta)}\right)\det\left[\phi_1,\phi_2,\phi_3,f_1,f_2,f_3\right]_D \det\left[\phi_{(\alpha)},\overline{\phi}_{(\beta)}\right]$$
$$\times \exp i\left[\int d^3x\left(B^a_\mu P^{a\mu} + \dot{B}^a_\nu Q^{a\nu} + \dot{\overline{\psi}}\Pi + \overline{\Pi}\dot{\psi}\right) - H_T\right] \tag{3.1}$$

donde el Hamiltoniano H_T fue definido en (2.6). Las cantidades $f_i \approx 0$ $(i = 1{,}2{,}3)$ son las condiciones de fijado de "gauge", una por cada vínculo de primera clase. Estas condiciones son todas independientes, y restringen las variables del espacio de las fases, obteniéndose así el verdadero espacio físico de Hilbert. Estas condiciones de fijado de "gauge" deben satisfacer que $\det[\phi_i, f_j]_D \neq 0$. Además, deben ser compatibles con las ecuaciones de movimiento y satisfacer la condición $[f_i, f_j] \approx 0$.

Se puede mostrar que en el caso abeliano la matriz $[\phi_1, \phi_2, \phi_3, f_1, f_2, f_3]_D$ no depende de las variables de campo[23], mientras que en el presente modelo no abeliano, aun en el caso de no tener los términos en altas derivadas, esta dependencia se hace presente[28]. Esta matriz es un operador no-local invertible M, cuyo determinante es un funcional no local. En el marco de la teoría perturbativa, el determinante de esta matriz se escribe en la representación integral utilizando funciones escalares $\overline{\eta}$ y η que anticonmutan. Luego, a la función de partición (3.1) se le adiciona un nuevo término de la forma $\int \exp\left[i \int d^3x\, \overline{\eta}^a(x)\, M^{ab} \eta^b(x)\right] \mathcal{D}\overline{\eta}\mathcal{D}\eta$, dando origen a una acción efectiva.

Una vez halladas las condiciones de fijado de "gauge", es posible llevar a cabo la integración de la ecuación (3.1), y lograr que el problema cuántico quede definido en función de una integral de camino cuyos campos independientes son el campo de "gauge" original A_μ , el campo espinorial de Dirac ψ y los campos "ghost". Luego es posible aplicar la técnica diagramática definiendo apropiadas reglas de Feynman para los propagadores y los vértices que corresponden a estos campos.

IV. DIAGRAMÁTICA Y REGLAS DE FEYNMAN

A partir de la expresión para la acción efectiva, se puede reconocer fácilmente a los propagadores, definidos por la parte de la densidad Lagrangiana cuadrática en los campos. La parte restante de ésta puede ser representada por vértices.

El propagador del campo fermiónico ψ es el usual. En consecuencia, es más interesante analizar el propagador del campo de "gauge" en el cual se pone de manifiesto el carácter de altas derivadas del modelo.

El término de la acción efectiva que corresponde al propagador del campo de "gauge" puede escribirse como:

$$\int d^3x \left[A^a_\mu \left(D^{-1}\right)^{\mu\nu} A^a_\nu\right]$$

La matriz 3x3 $\left(D^{-1}\right)^{\mu\nu}$ definida en la ecuación anterior es la inversa del propagador del campo de "gauge" A_μ. Es hermitiana y no degenerada, y es invertible. Así, el propagador $D_{\mu\nu}(k)$ en el espacio de los momentos puede ser evaluado correctamente. Es aquí donde se ve la conveniencia de adicionar términos en altas derivadas a la densidad Lagrangiana, ya que el propagador resultante, tiene un comportamiento $\sim \frac{1}{k^4}$ para grandes valores del momento. Esto hace que el modelo tenga un comportamiento ultravioleta menos divergente.

Es posible ver además que la introducción de términos en altas derivadas lleva a la aparición de nuevos vértices en el modelo. Por otro lado, se sabe que en teorías de campo que contienen la forma de volumen $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ el método de regularización dimensional es problemático. En estos casos, existen otros métodos de regularización invariantes de "gauge" que pueden utilizarse, como por ejemplo el procedimiento de Pauli-Villars[22]. Además, dado que las teorías de campo de Chern-Simons pertenecen a la categoría de teorías finitas, queda por resolver el problema de regularizar un modelo renormalizable. Esto quiere decir, que la teoría contiene sólo un número finito de diagramas divergentes. Es además importante hacer notar que en teorías cuánticas de campos descriptas por Lagrangianos que contienen términos en altas derivadas, la unitariedad puede ser violada. Esto ocurre cuando aparecen estados "ghost" con norma negativa. En un trabajo anterior[24] el problema de la unitariedad fue cuidadosamente estudiado a nivel de diagrama árbol. En el caso no abeliano vale la misma discusión. En consecuencia, siguiendo los pasos dados en Ref.24 (ver también Ref.30), primero debemos considerar el propagador del campo de "gauge" $D_{\mu\nu}(k)$. Luego, la matriz de residuos 3x3 $K^R_{\mu\nu}(k)$ se obtiene a partir de la matriz $D_{\mu\nu}(k)$ dejando de lado los polos. La matriz $K^R_{\mu\nu}(k)$ es hermitiana y puede ser diagonalizada y sus tres autovalores son diferentes entre sí y distintos de cero. Por lo tanto[30], puede ser definido un conjunto (α) de corrientes reales $J^{(\alpha)}_\mu(k)$, una para cada uno de los autovalores distintos de cero. Cuando todos los autovalores de la matriz de residuos evaluada en el polo son positivos, la normalización está dada por:

$$J^{(\alpha)}_\mu(k)\, K^R_{\mu\nu}\, J^{(\alpha)}_\nu(k) = +1 \,. \tag{4.1}$$

Cuando la matriz de residuos tiene un autovalor negativo en el polo, corresponde a estados de norma negativa, y ellos son físicamente inaceptables. Así, para recobrar la unitariedad, la normalización en la ecuación (4.1) debe hacerse con un signo menos. Este artificio, usualmente se conoce con el nombre de "prescripción de métrica indefinida", y es el que permite recuperar la unitariedad de la teoría.

[1] Jackiw R. 1987 "Quantum field theory and quantum statistics" vol 2, ed. I.A. Batalin et al (Bristol: Adam Hilder).

[2] Siegel W. 1979 Nuclear Phys. B 156 135.

[3] Shonfeld J. 1981 Nuclear Phys. B 185 157.

[4] Deser S., Jackiw R. and Templeton S, Phys.Rev.Lett. 48 (1982) 975; Ann.Phys. (NY) 140 (1982) 372; Ann.Phys. (NY) 195 (1988) 406.

[5] Hagen C.R. 1984 Ann.Phys. (NY) 157 342; 1985 Phys.Rev. D 31 2135.

[6] Dzyaloshinskii I., Polyakov A.M. and Wiegmann P.B. 1988 Phys. Lett. A 127 112.
[7] Wiegmann P.B. 1988 Phys.Rev.Lett. 60 821.
[8] Polyakov A.M. 1988 Mod.Phys.Lett. A 3 325.
[9] Bednorz G. and Mller K.A. 1986 Z.Phys. B 64 188.
[10] Anderson P.W. 1987 Science 235 1196.
[11] Matsuyama T., 1989 Phys.Lett. 228 B 99; 1990 J.Phys. A: Math. Gen. 23 5241.
[12] Lscher M. 1989 Nucl.Phys. B 326 557.
[13] Jackiw R., Bak D. and So-Young Pi 1994 Phys.Rev. D 49 6778.
[14] Qiong-gui Lin and Guang-jiong Ni, 1990 Class. Quantum Grav. 7 1261.
[15] Avdeev L., Grigoryev G. and Kazakov D., 1992 Nucl.Phys. B 382 561.
[16] Odintsov S., 1992 Z.Phys. C 54 527.
[17] Ellis R., 1975 J.Phys. A: Math. and Gen. 8 496.
[18] Leon M.D. and Rodriguez P.R. 1985 "Generalized Classical Mechanics and Field Theory" (Amsterdam: North-Holland).
[19] Kerstyen P.H.M., 1988 Phys.Lett 134A 25.
[20] Nesterenko V., 1989 J.Phys. A: Math. and Gen. 22 1673.
[21] Zi-ping Li, 1991 J Phys. A: Mathy. and Gen. 24 4261.
[22] Alvarez-Gaume L., Labastida J.M.F. and Ramallo A.V. 1990 Nucl Phys. B 334 103.
[23] Greco A., Repetto C.E., Zandron O.P. and Zandron O.S., (1994) J.Phys. A 27 239.
[24] Foussats A., Manavella E., Repetto C.E., Zandron O.P. and Zandron O.S. "Quantum methods in field theories with singular higher derivative Lagrangians". To be published in Int. Journal of Theoretical Physics (1995).
[25] Hawking S.W., Quantum Field Theory and Quantum Statistic vol. 2, ed. I.A. Batalin, C.J. Isham and G.A. Vilkovisky (Bristol: Adam Hilder) 1987.
[26] Ostrogradski M., Mem.Ac.St. Petersbourg 1 (1850) 385.
[27] Sundermeyer K. 1982 "Constrained Dynamics", Lectures Notes in Physics 169 (Springer-Verlag 1982).
[28] Faddeev L.D., 1970 Theor.Math.Phys.1 1.
[29] Senjanovic P., 1976 Ann. of Phys. (NY) 100 227.
[30] 't Hooft G. and Velman M., 1973 "Diagramar" (Geneva: CERN).