

# Un Modelo De Predicción De Toma De Nutrientes Y Crecimiento De Raíces De Cultivos Considerando Cinéticas De Sorción-Desorción

M.A. DZIOBA<sup>1</sup>, J.C. REGINATO<sup>2\*</sup> y D.A. TARZIA<sup>3</sup>

1) DEPTO. DE MATEMÁTICA, FAC. CS. FÍSICO-QUÍMICO Y NATURALES  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO-RUTA 8- KM 601, (5800) - RIO CUARTO - CORDOBA - ARGENTINA

2) DEPTO. QUÍMICA-FÍSICA, FAC. CS FÍSICO-QUÍMICO Y NATURALES  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE RÍO CUARTO-RUTA 8- KM 601, (5800) - RIO CUARTO - CORDOBA - ARGENTINA  
*e-mail: reginato@unrcc.edu.ar. Fax: (058) 676233/680280*

3) DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES,  
UNIVERSIDAD AUSTRAL, PARAGUAY 1950, (2000) - ROSARIO - ARGENTINA

Se desarrolla un modelo analítico de toma de nutrientes y crecimiento de raíces de cultivos el cual tiene en cuenta sorción y desorción de nutrientes de poca disponibilidad (P). El modelo es planteado a través de un problema de frontera libre y es aplicado el método del balance integral. Se analizan resultados teóricos con datos extraídos de la literatura así como el efecto de distintos parámetros del sistema suelo-planta sobre el crecimiento y la concentración de nutriente sobre la interfase raíz-suelo. Se comparan resultados obtenidos respecto de aquellos usando un poder buffer aparente.

An analytical model of nutrient uptake and root growth of crops taking into account sorption-desorption of nutrients of low availability (P) is developed. The model is stated through a free boundary model and the balance integral method is applied. Theoretical results with data extracted of bibliography and the effects of different parameters of soil-plant system on the root growth and the nutrient root-soil interface concentration are analysed. Results obtained are compared with those obtained using an apparent buffer power.

## Introducción

En artículos recientes ha sido considerado el problema de nutrientes de poca disponibilidad como el fósforo a través de modelos mecanísticos estáticos<sup>1,2</sup> mediante el cual se calcula la concentración en la interfase raíz-suelo y la consecuente toma de nutrientes así como trabajos considerando la sorción-desorción de los mismos en suelo<sup>3,4</sup>. En estos últimos trabajos se comparan predicciones usando cinéticas de sorción y concepto de poder buffer (donde el poder buffer  $b$  es definido como  $b = \partial C_s / \partial C_l$  con  $C_s$  como la concentración del nutriente en su fase móvil y  $C_l$  la concentración en solución suelo, estando implícito en esta definición una relación lineal entre estas concentraciones) para suelos calcáreos. Asimismo, la formulación de problemas de frontera libre permite postular un modelo de toma de nutrientes y crecimiento de raíces debido al transporte de iones en suelo con un enfoque dinámico<sup>5,6,7,8,9,10</sup>. El objetivo del presente trabajo consiste en estimar el crecimiento radial versus el tiempo así como la

concentración en la interfase raíz-suelo versus el radio raíz en función de algunos parámetros característicos del sistema suelo-planta, en particular aquel representado por la constante de reacción que regula los mecanismos de sorción-desorción  $A_{e1}$  relacionado con la precipitación de hidroxiapatita según modelo de Enfield<sup>4</sup>, mecanismo que se verifica en una gran parte de los suelos argentinos, así como comparar el crecimiento usando cinéticas de sorción-desorción y concepto de poder buffer.

## Análisis

Se considera un modelo unidimensional, es decir una única raíz cilíndrica en el suelo donde todo el nutriente que arriba a la superficie de la raíz se asume que es aprovechado para el crecimiento. Se asume que las condiciones de humedad, luz y temperatura son controladas (como en cámara de siembra), es decir, los coeficientes del modelo son constantes.

Con estas suposiciones, se plantea el siguiente modelo de crecimiento unidimensional de raíces

\* Autor a quien debe dirigirse la correspondencia

a través de un problema de frontera libre<sup>11</sup> a una fase (el suelo) en coordenadas cilíndricas.

$$D C_{rr} + v_0 \frac{C_r}{r} - A_{e1} C = C_t, \quad (1-i)$$

$$s(t) < r < R, \quad 0 < t < T$$

$$C(r, 0) = \varphi(r), \quad s_0 \leq r \leq R \quad (1-ii)$$

$$-D C_r(R, t) + v_0 C(R, t) = 0, \quad (1-iii)$$

$$0 < t < T$$

$$D C_r(s(t), t) + v_0 C(s(t), t) =$$

$$= k [C(s(t), t) - C_u] = a C(s(t), t) \dot{s}(t), \quad (1-iv)$$

$$0 < t < T$$

$$s(0) = s_0, \quad 0 < r < R \quad (1-v)$$

donde:

$$C_r = \frac{\partial C}{\partial r}, C_{rr} = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}, C_t = \frac{\partial C}{\partial t},$$

$$\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt},$$

$r$ : Distancia radial desde el eje de la raíz [cm],  $t$ : tiempo [seg],  $T$ : es el tiempo máximo para el cual el sistema tiene solución [seg],  $C$ : concentración de nutriente en solución su elo [gr/cm<sup>3</sup>],  $C_u$ : concentración umbral por debajo de la cual se detiene el crecimiento [mol/cm<sup>3</sup>],  $D$ : Coeficiente efectivo de difusión [cm<sup>2</sup>/seg],  $v_0$ : Velocidad media de la solución suelo a la superficie de la raíz [cm/seg],  $k$ : poder de absorcion del nutriente por parte de la raíz [cm/seg],  $A_{e1}$  es la constante de sorción-desorción [adimensional],  $R$ : radio rizósfera [cm],  $\varphi$ : perfil inicial de concentraciones [mol/cm<sup>3</sup>],  $a$ : coeficiente estequiométrico [adimensional] y  $s_0$ : radio inicial raíz [cm].

La ecuacion (1-i) representa el transporte del ion con un termino sumidero debido a la sorción-desorción.

Ecuaciones (1-ii) y (1-iii) son las condiciones iniciales y de contorno del sistema.

La ecuacion (1-iv) representa el balance de masa en la interfase raíz-suelo donde el total de iones que arriban a la raíz son incorporados mediante una cinética de absorción traduciéndose ello en crecimiento de la raíz

La ecuación (1-v) es la condición inicial para la frontera libre  $s(t)$  desconocida a priori.

El modelo es resuelto mediante la aplicación del método del balance integral<sup>6,7</sup> para lo cual se integra la ecuación (1-i) en el dominio  $(s(t), R)$  y se propone para  $C(r, t)$  la siguiente expresión:

$$C(r, t) = \varphi(r) \left[ 1 + \beta(t)(R - r)^2 \right],$$

$$\varphi(r) = A e^{\varepsilon r}, \quad A = C_R e^{-\varepsilon R}, \quad \varepsilon = \frac{v}{D}$$

que cumple las condiciones iniciales (1-ii) y de contorno (1-iii). Así, despues de manipulaciones elementales, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para  $s(t)$  y  $\beta(t)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{F_1 + v_0(F_2 + F_3 + F_4) + F_5}{F_6}, \quad \beta(0) = 0 \\ \frac{ds(t)}{dt} = \frac{k}{a} \left[ 1 - \frac{C_u}{C(s(t), t)} \right], \quad s(0) = 0 \end{array} \right.$$

donde:

$$C(s(t), t) = C_R \left[ 1 + \beta(t)(R - s(t))^2 \right] e^{-\varepsilon(R - s(t))},$$

$$F_1 = D \left[ \varepsilon e^{\varepsilon R} - \varepsilon e^{\varepsilon s(t)} \left( 1 + \beta(t)(R - s(t))^2 \right) + \right. \\ \left. + 2\varepsilon e^{\varepsilon s(t)} \beta(t)(R - s(t)) \right],$$

$$F_2 = \frac{e^{\varepsilon R}}{R} - \frac{e^{\varepsilon s(t)} \left( 1 + \beta(t)(R - s(t))^2 \right)}{s(t)},$$

$$F_3 = \left( 1 + \beta(t)R^2 \right) \left( \frac{e^{\varepsilon s(t)}}{s(t)} - \frac{e^{\varepsilon R}}{R} + \varepsilon A \right),$$

$$F_4 = -2R\beta(t)A + \frac{\beta(t)}{\varepsilon} \left( e^{\varepsilon R} - e^{\varepsilon s(t)} \right),$$

$$F_5 = -\frac{A_{e1}}{\varepsilon} \left[ e^{\varepsilon R} - e^{\varepsilon s(t)} + \beta(t) \left[ \frac{2}{\varepsilon^2} e^{\varepsilon R} - e^{\varepsilon s(t)} \left( \frac{(R - s(t))^2}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon} \left( R - s(t) + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \right] \right]$$

$$F_6 = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{2}{\varepsilon^2} e^{\varepsilon R} - e^{\varepsilon s(t)} \left( \frac{(R - s(t))^2}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon} \left( R - s(t) + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right) \right]$$

El sistema es resuelto por el método de Runge-Kutta para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Los siguientes gráficos (Figs. 1 y 2) muestran algunos resultados teóricos para el crecimiento radial vs. el tiempo así como la concentración en la interfase raíz-suelo  $C(s(t),t)$  vs. el tiempo en función de la constante de sorción-desorción  $A_{e1}$ .

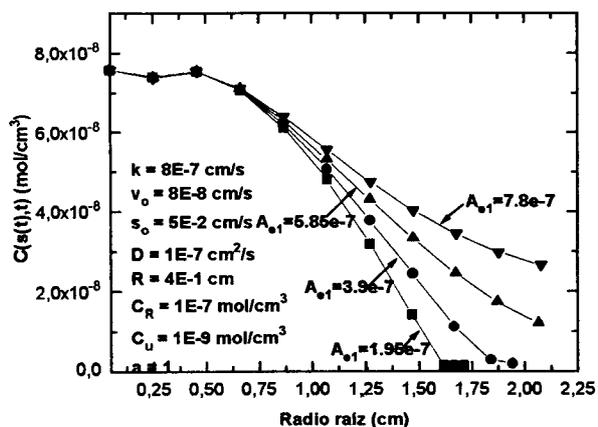


Figura 1

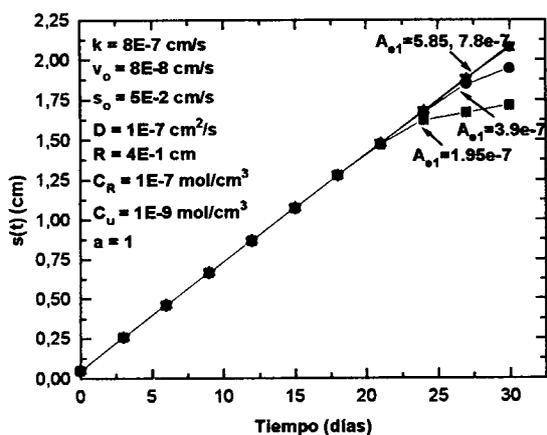


Figura 2

Las figs. 3 y 4 muestran resultados para  $C(s(t),t)$  vs.  $s(t)$  y  $s(t)$  vs.  $t$  en función del poder buffer aparente  $b$  aplicando el método del balance integral donde los valores usados son equivalentes a las constantes de reacción  $A_{e1}$  según<sup>12</sup>.

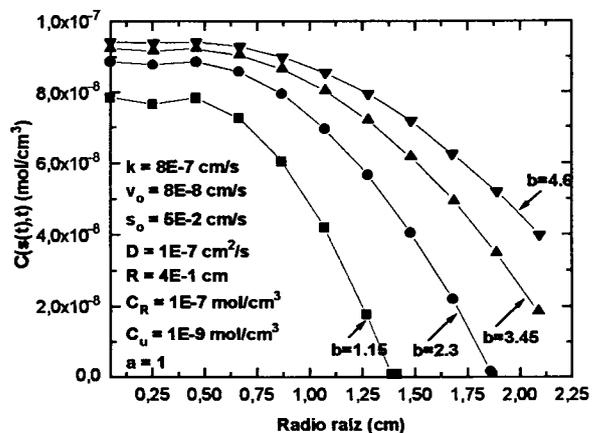


Figura 3

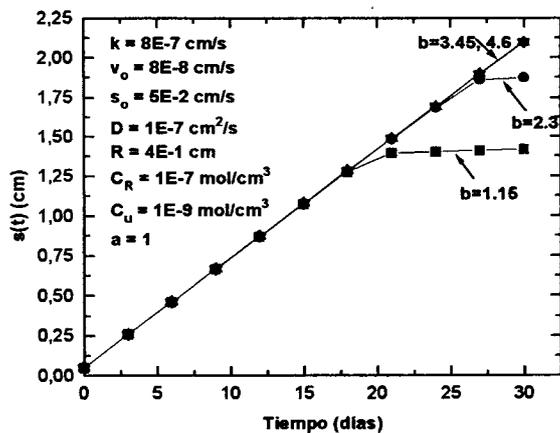


Figura 4

Las figuras 5, 6, 7 y 8 constituyen diagramas de sensibilidad para  $s(t)$  y  $C(s(t),t)$  a 12 y 30 días, respectivamente.

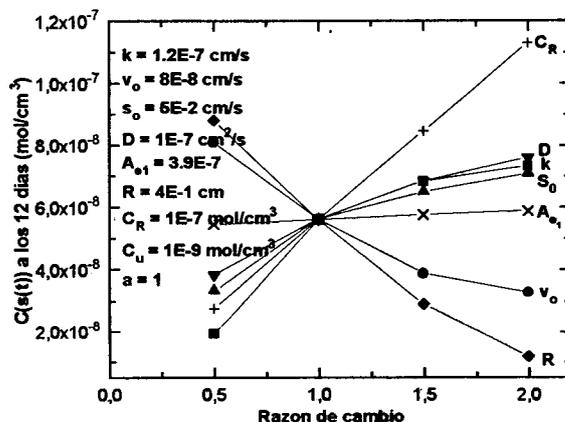


Figura 5

## Conclusiones

Del gráfico de  $C(s(t),t)$  vs.  $s(t)$  en función de  $A_{e1}$  puede concluirse que hasta los primeros diez días no se observa variación con  $A_{e1}$  y que a partir de este tiempo  $C(s(t),t)$  disminuye cuando  $A_{e1}$  disminuye (Fig. 1). Del gráfico de  $s(t)$  vs.  $t$  (Fig- 2) se observa que el ritmo de crecimiento es aproximadamente el mismo hasta los 20 días y luego disminuye cuando  $A_{e1}$  disminuye. Asimismo se observa que tanto el efecto de un poder buffer variable (a través de la cinética de sorción-desorción  $A_{e1}$ ) como constante (b) para un nutriente de poca disponibilidad solo influye en el crecimiento a partir de un dado tiempo aunque para un poder buffer constante el crecimiento es menor y la concentración en la interfase raíz-suelo es mayor, implicando esto último una sobreestimación de la toma de nutriente respecto a aquella cuando se considera la cinética de sorción-desorción (Figs. 3 y 4). El efecto de un poder buffer variable es de importancia en el uso de fertilizantes para siembra directa dado que un poder buffer variable afecta la localización del fertilizante con su consecuente implicancia en la producción de cultivos<sup>13</sup>.

Del análisis de los diagramas de sensibilidad (Figs. 5,6, 7 y 8), donde los mismos han sido construidos variando los valores de los parámetros dados en los mismos en 0.5, 1.5 y 2 veces según Barber<sup>2</sup>, se observa que para el crecimiento  $s(t)$  a los 12 días que los parámetros de mayor influencia son  $s_0$  y  $k$  (no mostrado en la figura) mientras que a los 30 días los que mas influyen son  $C_u$  y  $v_0$  y los restantes muestran una mayor dispersión en su efecto sobre el sistema. Similares conclusiones se obtienen para  $C(s(t),t)$  a los 12 y 30 días, siendo importante  $C(s(t),t)$  para la toma de nutrientes (la toma de nutrientes es calculada mediante la integral en el tiempo del producto de  $s(t)$  y el influjo neto ( $k[c(s(t),t)-C_u]$ ) mientras que  $s(t)$  lo es para las propiedades mecánicas (dado que el modulo de elasticidad de la raíz depende de  $s^4(t)$ ) y la obtencion de un área mayor de absorción.

Entre las limitaciones del presente modelo se encuentra que el mismo es unidimensional por simplicidad matemática aunque debería ser considerado además el crecimiento longitudinal y

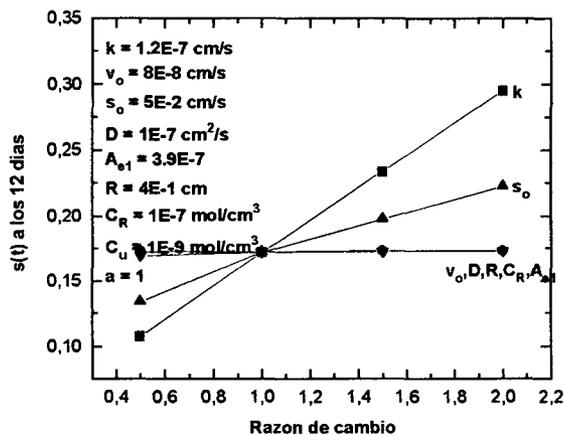


Figura 6

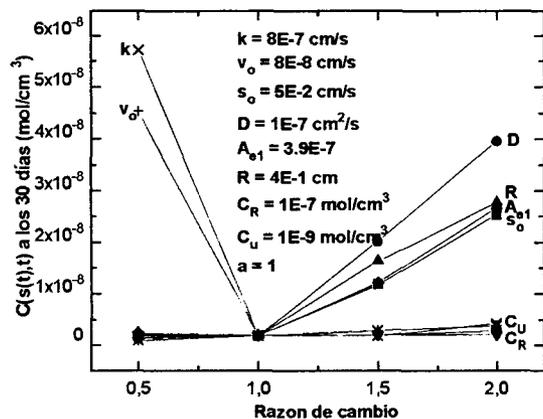


Figura 7

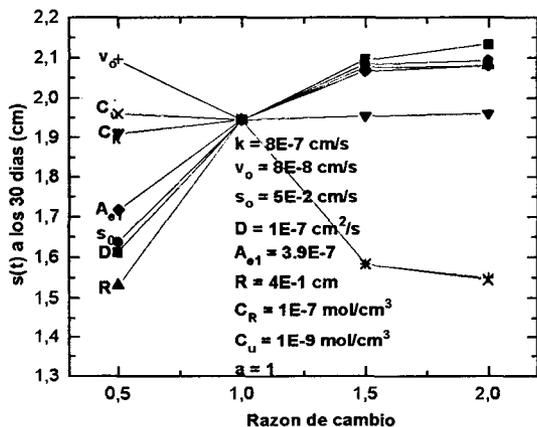


Figura 8

por ello deben considerarse estas conclusiones solo con valor cualitativo. Por lo tanto, el desarrollo de modelos básicos de crecimiento y toma de nutrientes pueden ser útiles para la elaboración de modelos más complejos (cuantitativos y por tanto más realísticos, como por ejemplo tener en cuenta otros mecanismos de precipitación asociados con la formación de compuestos de CaP ligeramente solubles y otro asociado con compuestos de P no solubles) así como para la implementación de técnicas de optimización para fertilizaciones y nutrición en agricultura.

## Referencias

- 1 - J.H. Cushman. "An analytical solution to solute transport near root surfaces for low initial concentrations: I. Equation development", Soil Sc. Soc. Am. J. 43, 1087-1090, (1979)
- 2 - S.A. Barber, M. Silberbush. "Plant Root Morphology and nutrient uptake" En: Barber S.A. D.R. Bouldin (eds.) Roots, Nutrient and waterflux and plant Growth. ASA Special Publication 49, Chap. 4 Soil Sc. Soc. Am. Madison WI. (1984)
- 3 - A. Shaviv, M. Shnek, U. Shaviv, I. Ravina. "Modelling Nutrient uptake considering sorption kinetics: Phosphorus uptake from a one dimensional rhizosphere", J. of Plant Nutrition 15(6,7) . 1099-1114. (1992)
- 4 - C.C. Einfield, T. Phan, D.M. Walters, R. Ellis J.R. "Kinetic model for phosphate transport and transformation in calcareous soil. 1. Kinetics of transformation", Soil Sc. Soc. Am. J. 45, 1059-1070, (1981)
- 5 - J.C. Reginato, D.A. Tarzia, A. Cantero. "On the free boundary problem for the Michaelis-Menten absorption model for root growth" Soil Sc. 150,722-729 (1990) y Soil Sc. 152 (2) 63-71 (1991)
- 6 - J. C. Reginato, D. A. Tarzia. "The balance integral method applied to root growth of crops". Int. J. of Eng. Sc. Vol. 31 (1),61-70 (1993)
- 7 - J.C. Reginato, D.A. Tarzia, M.A. Dzioba. "Analytical study of the effect of some soil and plant parameters on root growth due to absorption of one mobile ion: A free boundary model" Plant and Soil. 157, 185-196 (1993)
- 8 - J.C. Reginato, D.A. Tarzia, A. Cantero. "Un modelo mejorado para el crecimiento de raíces de cultivos", Anales AFA, vol I. 351-354. (1989).
- 9 - J.C. Reginato, D.A. Tarzia, M.A. Dzioba. "Crecimiento de raíces de cultivos con competencia para iones móviles a través del metodo del balance integral". Anales AFA, vol. 3, 447-451 (1991).
- 10 - J. C. Reginato, D. A. Tarzia. "Efecto de algunos parámetros del sistema suelo-planta sobre el crecimiento de raíces de cultivos debido a la absorcion de n-iones. Un modelo de frontera libre". Anales AFA, vol 4., 356-360, (1992).
- 11 - J. Crank, Free and Moving Boundary Problems. Clarendon Press, Oxford (1984)
- 12 - M. Shnek, A. Shaviv, I. Ravina. "The effect of soil P sorption kinetics on parameters used for modeling P uptake". Soil Sc. 151, 333-341, (1991).
- 13 - J.L. Kovar, S.A. Barber. "Reason for differences among soils in placement of P for maximun predicted uptake", soil Sci. Soc. Am. J. 53:1733-1736, (1990).

