

TEORIA CUANTICA: QUE NO SE ANULE LA ACCION.

Alberto Clemente de la Torre* y José Luis Iguain†
Departamento de Física, Universidad Nacional de Mar Del Plata,
Funes 3350, 7600 Mar Del Plata, Argentina.

La propuesta de adoptar como un principio básico, para la generación de una teoría cuántica, a la condición que el módulo de la acción de todo sistema exceda el valor de la constante de Planck y ciertos argumentos heurísticos en su favor son nuevamente presentados. Aquí se analizan algunas consecuencias de una ley de composición para la acción y se esboza la estructura de una teoría cuántica.

The proposal to adopt as a first principle that the action should always exceed the value of Planck constant, in order to generate a quantum theory, and some heuristic arguments in favor are newly presented. In this work some consequences of the composition law for the action are presented.

INTRODUCCION.

En una publicación reciente [1] se propuso plantear como un primer principio, que el módulo de la acción de todo sistema físico tenga a la constante de Planck como cota inferior. Se sugirió en dicho trabajo, la posibilidad de desarrollar una teoría cuántica a partir del principio $A \geq \hbar$ en forma similar a la generación de la teoría de la relatividad especial partiendo del principio $V \leq c$. La razón para intentar desarrollar una teoría cuántica partiendo de dicho principio es que la misma obtendría así un límite clásico bien definido por $\hbar \rightarrow 0$, de igual forma que existe el límite clásico de la relatividad especial, obtenido haciendo $c \rightarrow \infty$. La posibilidad de un límite bien definido tiene la virtud, y por eso es deseado, de permitir desarrollar una interpretación de la teoría cuántica en un cuadro conceptual que, al menos en el límite, coincide con los conceptos clásicos. Un sistema físico es considerado *clásico* cuando, en su evolución, está caracterizado por un valor de acción mucho mayor que \hbar y será *cuántico* cuando su acción es del orden de \hbar . Consideremos entonces la expresión clásica para la acción, tomando la notación usual,

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) dt. \quad (1)$$

Para N grados de libertad no interactuantes, esto es, para un Hamiltoniano $H = \sum_{k=1}^N p_k^2/2m$, resulta

$$A = \sum_{k=1}^N A_k, \quad \text{con} \quad A_k = \frac{1}{2} \int_{q_{k1}}^{q_{k2}} p_k dq_k. \quad (2)$$

Impongamos ahora, aunque sea brutalmente, que $A \geq \hbar$. En el trabajo citado, se dieron varios argumentos heurísticos presentando ciertas consecuencias de dicha imposición. Todas ellas favorecen la idea básica de la propuesta.

- 1- La condición que no se anule la acción sugiere una incertidumbre inherente en las coordenadas e impulsos, relacionadas por $\Delta q_k \Delta p_k \geq \hbar$, el principio de incerteza.
- 2- También surge como consecuencia, que el producto de incertezas para coordenadas no siempre se puede anular ya que existen estados donde $\Delta q_k \Delta q_r \geq K$. Esto es, la contextualidad de ciertos estados, de la cual la noseparabilidad es un caso especial.
- 3- La exigencia que no se anule la acción en un sistema cuántico aparece, representado en el formalismo usual de la mecánica cuántica por el álgebra no conmutativa de sus observables. En particular por $[q, p] = i\hbar$.
- 4- Para que no se anule la acción correspondiente a un grado de libertad rotacional es necesario un impulso angular mínimo cercano a $S \approx \hbar/2$. La teoría parece no tener lugar para bosones con espín cero. Si bien no se ha encontrado ninguna partícula con espín cero, ésta, el bosón de Higgs, es necesaria para el modelo estandar de partículas. Un bosón de Higgs compuesto, no elemental, no necesariamente implicaría la anulación de la acción.
- 5- Para evitar que se anule la acción de los fermiones mediante rotaciones de los sistemas de referencia o sea mediante un impulso angular orbital, se debe exigir que los únicos valores permitidos para éste son $L \approx 0, 1, 2, \dots$, en unidades de \hbar .

Todos estos argumentos son imprecisos y no deben tomarse con demasiada seriedad pero su conjunción sí sugiere continuar con el proyecto de desarrollar una teoría cuántica a partir de $A \geq \hbar$. Dicha teoría deberá reproducir exactamente los argumentos anteriores y en particular deberá clarificar la posibilidad de existencia, como partícula elemental, del bosón de Higgs así como de todos los bosones, ya que la acción rotacional de éstos parece poder anularse por medios cinemáticos.

*Inv. Ind. CONICET.

†Beca Perfeccionamiento UNMDP.

COMPOSICION DE LA ACCION.

Consideremos un sistema físico S compuesto por dos subsistemas S_1 y S_2 no interactuantes. Estos dos subsistemas pueden corresponder a dos grupos diferentes de grados de libertad o bien a la evolución temporal o espacial en diferentes intervalos. En ambos casos, clásicamente, la acción A del sistema se obtiene por la adición de las acciones de los subsistemas: $A = A_1 + A_2$. Esta propiedad aditiva de la acción clásica puede usarse para obtener una acción total nula, en oposición al principio propuesto. Por lo tanto la adopción de dicho principio nos impone adoptar una ley diferente de composición de la acción de un sistema, referida a sus subsistemas, de la misma manera que la exigencia $V \leq c$ resulta en la ley de composiciones de velocidades relativistas $u \oplus v = (u + v)/(1 + uv)$. Se pueden proponer varias leyes de composición diferentes, compatibles con el requerimiento $A \geq \hbar$. Una de ellas, que resulta de una simetría entre la relatividad especial y la cuántica, expresa la acción A de un sistema físico en términos de la acción A_1 y A_2 de sus dos subsistemas de la siguiente manera.

$$\frac{A}{\hbar} = \coth \left(\frac{1}{2} \frac{\ell_1 \ell_2}{\ell_1 + \ell_2} \right), \text{ con } \ell_i = \ln \left(\frac{A_i + \hbar}{A_i - \hbar} \right). \quad (3)$$

Esta expresión se comporta razonablemente. Por ejemplo, la ley de composición es asociativa; o sea que el orden en el cual componemos tres o más subsistemas para formar al sistema es irrelevante. Si componemos N subsistemas obtenemos:

$$\frac{A}{\hbar} = \coth \left(\frac{1}{2} \frac{\prod_{i=1}^N \ell_i}{\sum_{k=1}^N \prod_{i \neq k} \ell_i} \right) = \coth \left(\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{\ell_k} \right)^{-1} \right) \quad (4)$$

Para comparar esta composición con el caso clásico, supongamos un sistema compuesto por N subsistemas, todos caracterizados por el mismo valor de acción a . En este caso la acción total, obtenida de la ecuación anterior, resulta en

$$\frac{A}{\hbar} = \frac{(a + \hbar)^{1/N} + (a - \hbar)^{1/N}}{(a + \hbar)^{1/N} - (a - \hbar)^{1/N}}. \quad (5)$$

Comparando numéricamente este resultado con el correspondiente valor clásico: $A_{\text{clas}} = Na$, vemos que la diferencia es poco sensible al valor de N y es despreciable para a mayor que unas pocas veces \hbar . Esto es, dicho sistema se comporta clásicamente para todo N y a excepto cuando $a \approx \hbar$. Como aplicación de la ecuación anterior, consideremos un intervalo de evolución temporal T . Supongamos una partición de dicho intervalo en N subintervalos, todos iguales, de duración T/N . Supongamos también que todos estos subintervalos contribuyen a la acción $A(T)$ con la misma cantidad $a = A(T/N)$. Reemplazando arriba obtenemos después de simples transformaciones,

$$\frac{A(T) + \hbar}{A(T) - \hbar} = \left(\frac{A(T/N) + \hbar}{A(T/N) - \hbar} \right)^{1/N}. \quad (6)$$

Esta es una ecuación del tipo $F(x) = (F(\gamma x))^\gamma$ que tiene como solución única $F(x) = \exp(c/x)$ con c constante arbitraria. (Para demostrar esto se deriva con respecto a γ y obtenemos una ecuación diferencial que se puede integrar.) Entonces será,

$$\frac{A(T) + \hbar}{A(T) - \hbar} = e^{\frac{2\hbar}{ET}}, \quad (7)$$

donde E es una constante, o sea independiente de T , con unidades de energía. Resolvemos esta expresión y obtenemos que la acción correspondiente a un intervalo de evolución T estará dada por,

$$\frac{A(T)}{\hbar} = \frac{e^{\frac{2\hbar}{ET}} + 1}{e^{\frac{2\hbar}{ET}} - 1} = \coth \left(\frac{\hbar}{ET} \right). \quad (8)$$

En un sistema en estado estacionario, se reúnen las condiciones supuestas en este ejemplo. Notemos que para valores grandes de ET obtenemos el resultado clásico $A(T) \rightarrow ET$. Podemos ahora repetir el mismo argumento pero considerando un intervalo Q de evolución con respecto a algún grado de libertad q . Si podemos suponer que la contribución a la acción, debida a una evolución de magnitud Q en la coordenada q , depende solo de Q , entonces obtenemos,

$$\frac{A(Q)}{\hbar} = \frac{e^{\frac{2\hbar}{PQ}} + 1}{e^{\frac{2\hbar}{PQ}} - 1} = \coth \left(\frac{2\hbar}{PQ} \right), \quad (9)$$

donde P es una constante que no depende de Q y tiene las unidades del impulso canónico asociado al grado de libertad q . Igualmente esta acción tiende al valor clásico $A(Q) \rightarrow \frac{1}{2}PQ$ cuando PQ es grande. De esta manera hemos podido encontrar cómo la acción depende del valor de los intervalos de evolución, en un sistema estacionario y libre de fuerzas. Esto es, cuando E no depende de T , y P es independiente de Q (no hay "fuerzas" asociadas a la coordenada q).

Un caso interesante, no considerado por los ejemplos anteriores, es cuando la acción de un subsistema tiende a cancelar la acción de otro subsistema. Veremos que, en este caso, el sistema tiene comportamiento cuántico ¡aunque sus subsistemas sean clásicos! Para ver esto, consideremos la ecuación (3) para dos subsistemas clásicos (que dos subsistemas cuánticos se compongan en un sistema cuántico no es sorprendente). Sea entonces $A_1 = a + \alpha$, $A_2 = -a + \alpha$ con $a \gg \hbar$ y $\alpha \rightarrow 0$. Con esto, aproximando ℓ_1 y ℓ_2 en la ecuación (3), obtenemos

$$\frac{A}{\hbar} \approx \coth \left(\frac{\hbar}{2\alpha} \left(1 - \frac{\hbar^2}{3a^2} \right) \right) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \pm 0} \pm 1. \quad (10)$$

Vemos entonces que dos subsistemas clásicos pueden conspirar para que el sistema total se comporte

cuánticamente. Este comportamiento no es comunmente observado en los sistemas porque requiere una compensación muy fina, del orden de \hbar , que implica una precisión en las observaciones no alcanzable con nuestros instrumentos y sentidos.

HACIA UNA TEORIA CUANTICA.

En esta sección intentaremos esbozar la estructura general de una teoría cuántica. Definimos al sistema por un conjunto de observables. Un observable es una propiedad objetiva para el cual existe un procedimiento experimental que lo pone en evidencia. A cada observable le asociamos un *valor* y una *incerteza*. El esquema que estamos esbozando es de primer orden. Una teoría más precisa podría asignar a cada observable una distribución. Todos los observables pertenecen a subsistemas que contribuyen en la acción total del sistema. El valor y la incerteza de cada observable se deben obtener de postular un principio extremal para la acción, similar a la teoría clásica, y además postular que el módulo de la acción exceda \hbar . La ley de composición de la acción presentada, garantiza el cumplimiento de este último requerimiento.

Para ilustrar cómo la incerteza en los observables puede surgir de los requerimientos impuestos a la acción, consideremos el caso de un sistema en estado estacionario y libre de fuerzas. En este caso, la acción debida a una evolución en un intervalo Q de la coordenada q está dada por la ecuación (9). En estas condiciones, dicha coordenada tendrá una incerteza Δq que podemos definir como el mayor intervalo para el cual su acción correspondiente sea del orden de \hbar . Esto es,

$$\hbar \approx A(\Delta q) = \hbar \coth \left(\frac{2\hbar}{P\Delta q} \right). \quad (11)$$

Esta condición se cumple cuando

$$\Delta q \approx \frac{2\hbar}{P}. \quad (12)$$

Podemos ver que esta incerteza corresponde a una falta de localización en la coordenada q ya que correpondería a una translación *sin velocidad*. Esto se ve si igualamos la expresión cuántica (9) con la clásica (2) para ver la implicación cuántica sobre el concepto *clásico* del movimiento.

$$\frac{1}{2} \int_0^Q p dq = \hbar \coth \left(\frac{2\hbar}{PQ} \right), \quad (13)$$

Resolvemos:

$$p(Q) = 2\hbar \frac{d}{dQ} \coth \left(\frac{2\hbar}{PQ} \right) = P \left(\frac{2\hbar/(QP)}{\sinh(2\hbar/(QP))} \right)^2. \quad (14)$$

Para valores de Q mayores que la incerteza dada por la ecuación (12), el impulso p tiende a la constante P como es de esperar clásicamente (de paso, esto nos permite identificar la constante P con el impulso); pero para

valores de Q menores que la incerteza, el impulso se acerca a cero, lo que implica una propagación sin velocidad. Todos los valores de q dentro de la incerteza Δq están simultáneamente ocupados.

Claramente es posible intercambiar los roles de las coordenadas e impulsos mediante una transformación canónica ($q \rightarrow -p, p \rightarrow q$). En esta transformación, la acción cambia de signo pero los requerimientos de que sea extrema y que no se anule permanecen invariantes. De esta manera obtenemos, para sistemas estacionarios y libres de fuerzas, una expresión, para la acción, ahora como función de P , idéntica a la ecuación (9); y definimos la incerteza en el impulso que cumple con

$$\Delta p \approx \frac{2\hbar}{Q}. \quad (15)$$

Si identificamos a las constantes Q y P con las incertezas Δq y Δp podemos obtener de las ecuaciones (12) o (15) una expresión similar a la relación de incerteza de Heisenberg:

$$\Delta q \Delta p \approx 2\hbar. \quad (16)$$

En forma similar se pueden obtener relaciones de incerteza para energía y un intervalo temporal. Sin embargo esta relación tiene las mismas dificultades de interpretación que las encontradas en la mecánica cuántica convencional, debido a que el tiempo no es un observable del sistema sino que es un parámetro para caracterizar la evolución.

En la determinación de condiciones que hacen a la acción estacionaria aparecen, además de los casos clásicos, situaciones en que la acción se estabiliza por mecanismos de conspiración entre subsistemas, generando correlaciones no esperadas clásicamente. Analicemos este mecanismo de conspiración para el caso de un sistema de dos partículas en una dimensión. Sean x_1, x_2, p_1, p_2 las coordenada y sus impulsos correspondientes. Supongamos a las dos partículas libre de fuerzas, en un intervalo de evolución para sus coordenadas desde cero hasta los valores actuales de x_1, x_2 . En estas condiciones cada una de las partículas, o sea cada subsistema, tiene una acción dada por la ecuación (9). Esto es,

$$A_1 = \hbar \coth \left(\frac{2\hbar}{p_1 x_1} \right), A_2 = \hbar \coth \left(\frac{2\hbar}{p_2 x_2} \right). \quad (17)$$

Usando la ecuación (2), podemos componer estas acciones para obtener la acción total dada por

$$A = \hbar \coth \left(\frac{2\hbar}{p_1 x_1 + p_2 x_2} \right). \quad (18)$$

En ciertas condiciones los dos subsistemas pueden conspirar para hacer esta acción cercana a \hbar , aunque sus acciones (17) sean grandes. Esto sucede si $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq 4\hbar$ que se puede realizar tomando $x_1 \approx D/2, x_2 \approx -D/2, p_1 \approx P/2$ y $p_2 \approx P/2$. Notemos que esta preparación

es justamente la correspondiente al sistema de Einstein - Podolsky - Rosen que exhibe las correlaciones cuánticas designadas por "Noseparabilidad o Contextualidad" [2].

CONCLUSIONES.

Los argumentos aquí presentados refuerzan el proyecto de desarrollar una teoría cuántica a partir de los mencionados principios. El desarrollo formal de dicha teoría ha sido solamente esbozado. Para completar este proyecto se debe demostrar aún que el formalismo usual de la mecánica cuántica en los espacios de Hilbert es una representación adecuada del cuadro conceptual aquí desarrollado. Una posible conexión entre este cuadro y el formalismo usual de la mecánica cuántica puede realizarse mediante la aplicación del concepto de "transmisión" [3]. Se puede intentar construir la acción en términos de las funciones de transmisión y, a partir de

los principios postulados, deducir sus propiedades. Por otro lado, los espacios de Hilbert brindan una sencilla representación para el concepto de transmisión, quedando así establecida la conexión entre los postulados y el formalismo usual.

-
- [1] A. C. de la Torre, "Search of a First Principle for Quantum Physics". En *Fundamental Problems in Quantum Physics*, M. Ferrero and A. van der Merwe. Eds. Kluwer Academic Publ. (1995).
 - [2] A. C. de la Torre, "Contextuality in quantum systems", *Am. J. Phys.* **62**, 808-812, (1994).
 - [3] A. C. de al Torre, "The Concept of Transmission in Quantum Mechanics". *Found. of Phys. Lett.* **7**, 143-159, (1994).