

# Un Modelo Matemático sobre Coexistencia Competitiva de dos especies a través de una Analogía Mecánico Cuántica

M. BELLINI\*, B. VON HAEFTEN\*, R. DEZA\* Y H. S. WIO†

\* Dpto. de Física, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad Nacional de Mar del Plata

Funes 3350, (7600) Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina

† Centro Atómico Bariloche e Instit. Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo

E. Bustillo 9500, (8400) S. C. de Bariloche

## Resumen

Cuando se incluye dependencia espacial en modelos tipo Lotka-Volterra, el resultado conocido como "principio de exclusión competitiva" puede dejar de ser válido. En este trabajo mostramos cómo la coexistencia es posible cuando sólo la especie débil tiene la habilidad de seguir con un movimiento de tipo difusivo a un superávit momentáneo de recurso alimentario que se propaga como una onda en una dirección determinada. Un simple cambio de variables pone al problema en correspondencia con uno de Mecánica Cuántica, lo que permite extraer resultados completamente analíticos en un ejemplo.

## Abstract

When spatial dependence is included in Lotka-Volterra-like models, the result known as "the principle of competitive exclusion" may cease to be valid. In this work it is shown that coexistence is indeed possible when only the "weak" species has the ability to follow, with a diffusive motion, a momentary surplus in the food resource that propagates as a wave in a given direction. A simple change of variables maps the problem onto a Quantum Mechanical one, a fact that allows to obtain wholly analytical results in at last one example.

## I. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas de importancia bajo estudio en sistemas biológicos consiste en el estudio de las interacciones entre especies. De estas interacciones las más estudiadas son la depredación y la competencia. En la primera, una de las especies se beneficia en detrimento de la otra, mientras que en la segunda, ambas especies se inhiben mutuamente. En la naturaleza se observa que la lucha por la existencia termina con la extinción completa de una de las especies, lo cual es conocido como *principio de exclusión competitiva*. La especie sobreviviente se llama "fuerte", mientras que la que se extingue es denominada "débil".

La teoría matemática de la competencia se debe a Volterra [1], quien en 1927 mostró que la coexistencia de dos o más especies, es imposible cuando existe sólo una presa. En su trabajo, muestra que cuando no

hay dependencia espacial, sólo la especie fuerte sobrevive. En trabajos anteriores [7,9,11], mostramos cómo para ciertos patrones de alimento, asociados a potenciales polinómicos (o reducibles a polinómicos, exacta y cuasiexactamente solubles) de una ecuación tipo Schrödinger, es posible la coexistencia.

En este trabajo estudiamos la posibilidad de coexistencia entre dos especies que compiten por un alimento común a ambas. La coexistencia aparece, para el caso espacial homogéneo, a partir de la capacidad de difundir que posee la llamada especie débil.

## II. MODELO MATEMÁTICO

Consideremos el caso de dos especies que compiten por una misma fuente de alimentos. El sistema estará adecuadamente descrito para el caso espacialmente homogéneo por las ecuaciones

$$\partial_t n(t) = [b M(t) - a] n(t)$$

$$\partial_t N(t) = [B M(t) - A] N(t)$$

$$\partial_t M(t) = Q(t) - [G + c n(t) + C N(t)] M(t)$$

(1)

donde  $bM(t)$  y  $BM(t)$  nos dan la tasa de crecimiento poblacional de las especies débil y fuerte respectivamente (por consumo de la especie cuya densidad es  $M$ ), mientras que  $a$  y  $A$  representan la tasa de mortalidad, que supondremos constante. La producción de alimento está asegurada a través de la fuente  $Q(t)$ , independiente de las densidades poblacionales. La tasa de mortalidad propia del alimento la denotaremos con  $G$ , y la supondremos constante. El sistema de la ecuación (1) tiene como solución para el caso estacionario

$$M_n = \frac{a}{b}, \quad n_n = \frac{Qb - Ga}{ca}, \quad N_n = 0,$$

$$M_N = \frac{A}{B}, \quad N_N = \frac{QB - GA}{CA}, \quad n_N = 0.$$

(2)

Supondremos

$$\frac{A}{B} < \frac{a}{b}, \quad (3)$$

El modelo anterior puede ser enriquecido si la especie débil tiene la capacidad de migrar

$$\partial_t n(x, t) = D_n \partial_x^2 n(x, t) + [bM(x, t) - a] n(x, t)$$

$$\partial_t N(x, t) = [BM(x, t) - A] N(x, t)$$

$$\partial_t M(x, t) = Q(x, t) - [G + cn(x, t) + CN(x, t)] M(x, t). \quad (4)$$

### III. LA DISPONIBILIDAD DE ALIMENTO COMO UNA ONDA SOLITARIA

Las ecuaciones (4) pueden ser simplificadas suponiendo  $b = c$  y  $C = B$ . Si multiplicamos a  $n, N, M$  y  $Q$  por  $\frac{b}{a}$  y llamamos

$$G = \frac{g}{a}, \quad \beta = \frac{B}{b}, \quad \alpha = \frac{A}{a}, \quad q = \frac{bQ}{a^2}, \quad (5)$$

haciendo la transformación  $t \rightarrow \tau = at, x \rightarrow y = x \sqrt{\frac{a}{D_n}}$ , el sistema (4) adopta la forma:

$$\partial_\tau n(y, \tau) = \partial_y^2 n(y, \tau) + [M(y, \tau) - 1]n(y, \tau)$$

$$\partial_\tau N(y, \tau) = [\beta M(y, \tau) - \alpha]N(y, \tau)$$

$$\partial_\tau M(y, \tau) = q(y, \tau) - [g + n(y, \tau) + \beta N(y, \tau)]M(y, \tau) \quad (6)$$

Sea  $M(x, t)$  una onda viajera con velocidad de propagación constante  $c$ . Luego del cambio de variables  $y \rightarrow \xi = y - ct$  las ecuaciones (6) se escribirán

$$\partial_\tau n(\xi, \tau) = \partial_\xi^2 n(\xi, \tau) + c\partial_\xi n(\xi, \tau) + [M(\xi, \tau) - 1]n(\xi, \tau)$$

$$\partial_\tau N(\xi, \tau) = c\partial_\xi N(\xi, \tau) + [\beta M(\xi, \tau) - \alpha]N(\xi, \tau)$$

$$\partial_\tau M(\xi, \tau) = q(\xi, \tau) - [g + n(\xi, \tau) + \beta N(\xi, \tau)]M(\xi, \tau) + c\partial_\xi M(\xi, \tau). \quad (7)$$

Si proponemos

$$n(\xi, \tau) = e^{-c/2 \tau} \phi(\xi, \tau), \quad (8)$$

se obtiene como ecuación para  $\phi(\xi, \tau)$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + [M(\xi) - 1 - \frac{c^2}{4}] \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \tau}. \quad (9)$$

Suponiendo en (9) el caso estacionario ( $\partial_\tau \phi = 0$ ), se obtiene una ecuación tipo Schrödinger para el caso estacionario

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + [E - V(\xi)] \psi = 0, \quad (10)$$

donde es posible identificar a  $V(\xi) \rightarrow -M(\xi)$  y  $E \rightarrow -1 - \frac{c^2}{4}$ . La única solución relevante en (11) es (si hablamos de estados ligados) el estado fundamental  $\psi_f$  con su correspondiente autovalor energético  $E_f$ . Luego, para cada sistema (o patrón de alimento) considerado, sólo tendremos una posible velocidad de propagación. El resultado general, para la especie fuerte, en el caso estacionario es

$$N_s(\xi) = N^s e^{-1/c \int_{\xi}^{\infty} (\beta M(\xi') - \alpha) d\xi'} \quad (11)$$

para  $\xi$  en  $[-\xi_o, \xi_o]$ ,  $N_s(\xi) = N^s$ , para  $\xi > \xi_o$ , y (en principio) un valor constante diferente para  $\xi < -\xi_o$ . Por último, se obtiene para la fuente

$$q_s(\xi) = [g + \beta N_s(\xi) + n_s(\xi)] M_s(\xi) - c \partial_\xi M_s(\xi). \quad (12)$$

Esto es, para el caso estacionario, la fuente es la responsable de mantener invariante el patrón de alimento  $M$  en el sistema que se traslada con velocidad  $c$ .

### IV. EJEMPLO: POTENCIAL SÉXTICO NO SIMÉTRICO TRUNCADO

Consideremos un patrón de alimento dado por la expresión

$$M_s = \begin{cases} -\xi^6 - \xi^5 - \xi^4 \\ -\xi^3 + \frac{21}{8}\xi^2 \\ + \frac{49}{128}\xi + 15 + \frac{\alpha}{\beta} & \text{si } \xi \in [-1.85, 1.428] \\ \frac{\alpha}{\beta} & \text{si } \xi \notin [-1.85, 1.428] \end{cases}$$

donde  $\alpha < \beta$ . Este patrón de alimento está asociado a un potencial séxtico no simétrico, correspondiente a la familia de los cuasi-exactamente solubles.

Luego de imponer las condiciones de continuidad correspondientes en los puntos  $\pm \xi_o$ , obtenemos (para  $\xi_o^+ = 1.428$  y  $\xi_o^- = -1.85$ ) la autofunción correspondiente al autoestado fundamental

$$\psi_f \propto \begin{cases} e^{k(\xi+1.85)} & \text{si } \xi \in (-\infty, -1.85) \\ \exp\left\{-\left[\frac{5}{16}\xi + \frac{3}{16}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^4\right]\right\} & \text{si } \xi \notin [-1.85, 1.428] \\ e^{-k(\xi-1.428)} & \text{si } \xi \in (1.428, \infty) \end{cases}$$

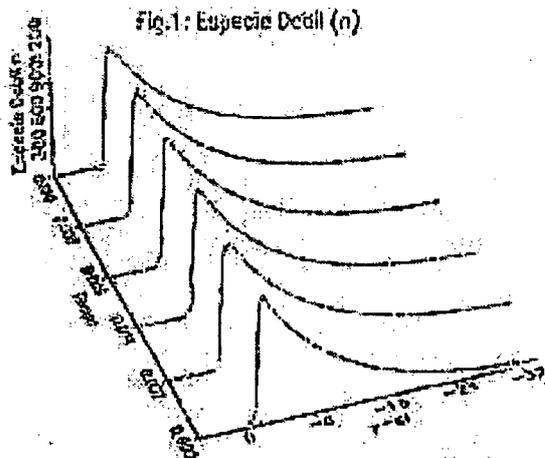
donde  $k = \sqrt{E_f + \frac{\alpha}{\beta}}$ . Luego, la densidad poblacional para la especie débil será

$$n_s(\xi) = e^{-c/2 \xi} \psi_f(\xi), \quad (13)$$

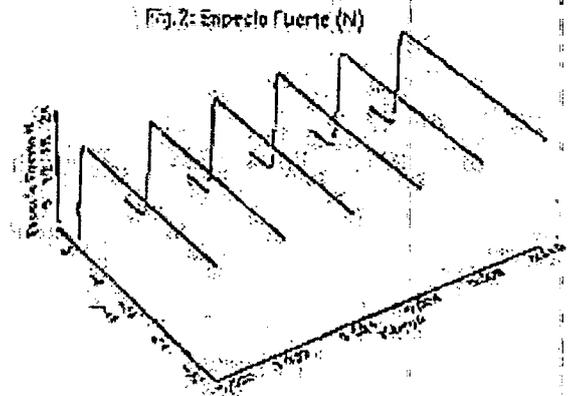
donde  $c(E_f) = 7.24$ . Luego la solución para la especie fuerte será (para  $\alpha = 0.5$  y  $\beta = 1$ )

$$N \propto \begin{cases} \exp\left\{-\frac{1}{c} \left[ \frac{\xi^7}{7} + \frac{\xi^6}{6} + \frac{\xi^5}{5} + \frac{\xi^4}{4} - \frac{7\xi^3}{8} - \frac{49\xi^2}{256} \right] - 15\xi \right\} & \text{si } \xi \in [-1.8, 1.428] \\ 5.66 \cdot 10^{-9} & \text{si } \xi > 1.428 \\ 1.05 \cdot 10^{20} & \text{si } \xi < -1.85 \end{cases}$$

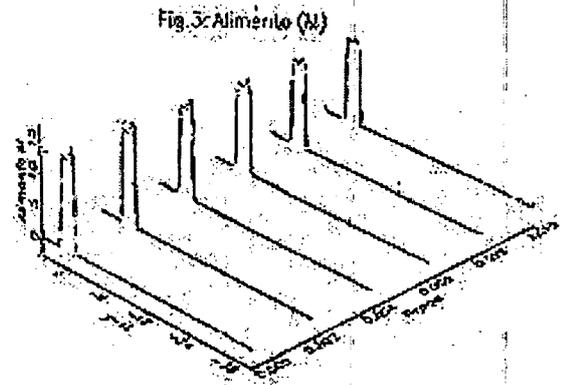
En las figuras 1), 2), y 3) se muestran las propagaciones temporales de las especies débil ( $n$ ), fuerte ( $N$ ), y el alimento ( $M$ ), respectivamente. En la figura 4) se muestra la desviación standard, en la que se aprecia que el método de propagación temporal utilizado (método explícito) es fiable hasta  $Tf = 0.1$ . En la figura 5) se muestra la fuente  $q_s$  que provee el alimento. En la figura 6) se graficó la desviación standard para una fuente perturbada en un 10%.



**Fig. 1)** Gráfico de  $n_s(\xi)$  (ec. 13), con  $c = 7.24$  y  $\psi_f$  definida en el texto. El eje temporal permite apreciar su estacionariedad. Los valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\xi_0^+$  y  $\xi_0^-$  son los indicados en el texto.



**Fig. 2)** Gráfico de la evolución de la especie "fuerte"  $N(\xi)$  (fórmula definida en el texto). El eje temporal permite apreciar su estacionariedad. Los valores de los parámetros son indicados en el texto.



**Fig. 3)** Evolución del "alimento"  $M_s$ , (fórmula definida en el texto), para los valores indicados de los parámetros. El eje temporal permite apreciar su estacionariedad.

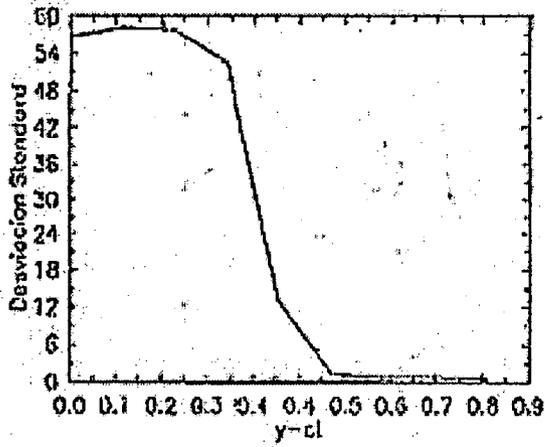


Fig. 4) Prueba de fiabilidad del método de cálculo.

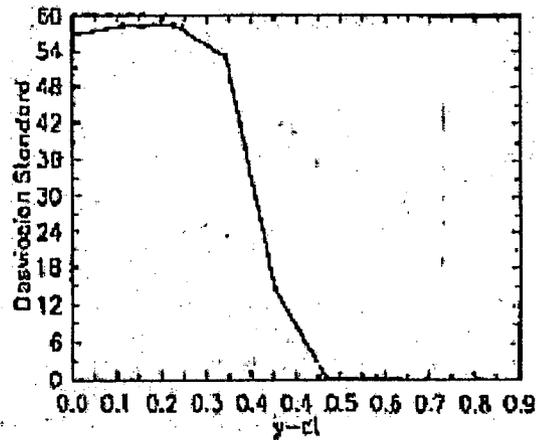


Fig. 6) Prueba de estabilidad ante perturbaciones de la fuente  $q_s(\xi)$ .

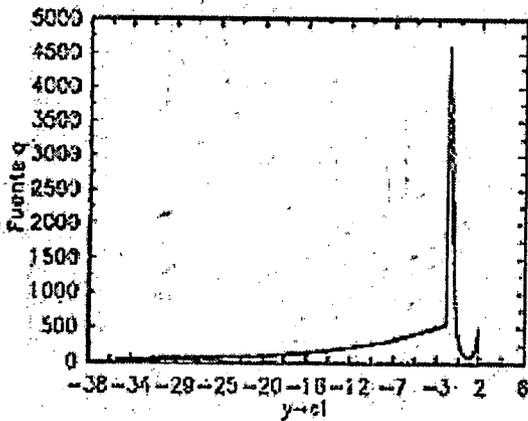


Fig. 5) Gráfico de  $q_s(\xi)$  (ec. 12), para los valores indicados de los parámetros.

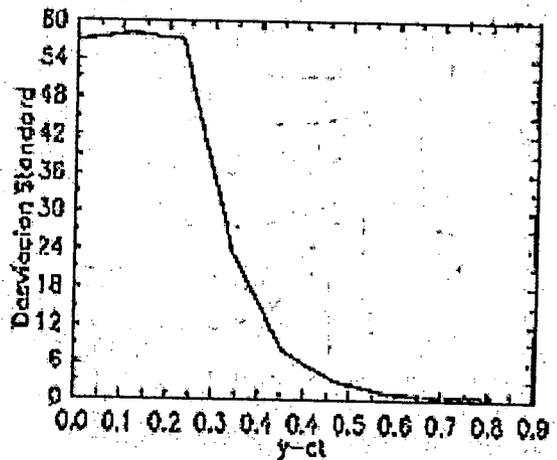


Fig. 7) Prueba de estabilidad ante perturbaciones en el autovalor de velocidad  $c(E_f)$ .

Se observa que el método numérico utilizado es igualmente fiable (hasta  $Tf = 0.1$ ), pero luego el sistema se vuelve más inestable que para el caso no perturbado, dado que la pendiente varía mucho más abruptamente que en el caso de la fuente no perturbada (ver fig.4). En la fig. 7) se muestra la desviación standard para un perturbación en la velocidad de un 10%. Se observa que el sistema se vuelve más inestable que en el caso de la fuente no perturbada, pero no tanto como para la fuente perturbada.

## V. CONCLUSIONES

Se estudió un modelo de competencia biológica en el que dos especies compiten por un alimento común. La especie débil tiene la capacidad de difundir, lo cual le permite coexistir con la fuerte. La ecuación que describe la distribución poblacional de la especie que difunde puede ser mapeada en una ecuación del tipo de Schrödinger, donde el patrón de alimento está dado (a menos de un signo) por un potencial mecánico cuántico. Cuando este potencial contiene estados ligados se obtiene un espectro discreto de energía (asociado a espectro de velocidades con que se propaga la especie débil) con sus correspondientes autofunciones. De ellas, sólo nos interesa el autoestado fundamental (con su autovalor de energía), debido a que es el único que no tiene nodos (lo cual nos asegura que la distribución poblacional de la especie débil es definida positiva en todo el dominio de interés).

Se propuso un ejemplo para un patrón de alimento séxtico no simétrico y truncado, y se hallaron las expresiones para las densidades poblacionales de las especies débil y fuerte. En otro trabajo se estudia la coexistencia entre dos especies a partir de patrones de alimento espacialmente uniforme pero en condiciones ambientales variables con el tiempo que la especie débil es capaz de aprovechar mejor debido a que recibe ayuda externa.

- [1] V. Volterra, R. Comitato Talassografico Italiano, *Memoria* **131**, pp 1-142 (1927).
- [2] J. D. Murray, *Mathematical biology*, Springer-Verlag, (1989).
- [3] Yasuhiro Takeuchi, *Math. Biosci.* **99**, 181 (1990). Yasuhiro Takeuchi, *Math. Biosci.* **106**, 111 (1991). Yasuhiro Takeuchi, *WSSIA A* **1**, 531, (1992).
- [4] S. Muratori and S. Rinaldi, *SIAM J. Appl. Math.* **49**, 1462 (1989).
- [5] A. S. Mikhailov, *Phys. Lett.* **73A**, 143 (1979). A. S. Mikhailov, *Z. Physik B* **41**, 277 (1981). A. S. Mikhailov, *Phys. Rep.* **184**, 308 (1989).
- [6] T. R. Malthus, *An essay on the principle of population*, 1798, Peguin Books, 1970.
- [7] Carlos Schat, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*, M.Sc.Thesis in Physics, Instituto Balseiro, 1991. C. Schat and H. S. Wio, *An Exact Analytic Solution of a Three Component Model for Competitive Coexistence*, Submitted to *Math. Biosci.* (1993).
- [8] S. A. Hassan, M. N. Kuperman, H. S. Wio, D. H. Zanette, *Evolution of reaction-diffusion patterns in infinite and bounded domains*, accepted in *Physica A* (1993).
- [9] L. D. Salem, *Solvable Models in Quantum Mechanics and their Relation with Algebraic Many Body Models*, Ph.D. Thesis, Instituto Balseiro, 1992. L. D. Salem and R. Montemayor; *Phys. Rev. A* **43**, 1169 (1991).
- [10] H. S. Wio, M. N. Kuperman, B. von Haefen, M. Bellini, R. R. Deza, C. Schat; *Competitive Coexistence in Biological Systems: Exact Analytical Results through a Quantum Mechanical Analogy*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands 1994. En prensa.
- [11] H. S. Wio, M. N. Kuperman, B. von Haefen, M. Bellini y R. Deza. *Anales AFA* **5**, 77 (1993).