

Interpretación Geométrica del Efecto No-Refractivo para Transparencias Rugosas

F. Perez Quintián¹, M. Rebollo^{1*} y N. Gaggioli^{2**}

1- LAB. LASER, DPTO. DE FÍSICA, FAC. DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD DE BS. AS.,
PASEO COLÓN 850, (1603) BUENOS AIRES.

2- GRUPO DE OPTICA Y LASER, ENDYE, CAC, COMISIÓN NACIONAL DE ENERGÍA ATÓMICA,
AV. DEL LIBERTADOR 8250, (1429) BUENOS AIRES.

e-mail: mrebollo@aleph.fiuba.edu.ar

La distribución de luz dispersada por una transparencia rugosa presenta un efecto anómalo llamado "dispersión no refractiva". Este efecto puede describirse, en forma simplificada, como el apartamiento del máximo de la curva de difusión de la dirección dada por la ley de Snell.

En este trabajo presentamos un sencillo modelo geométrico que explica una parte importante de este efecto, y algunos resultados experimentales con luz blanca que confirman que el efecto tiene una componente geométrica.

TEORÍA

Distribución de pendientes

Si se tiene una superficie cuyas alturas tienen una función de distribución gaussiana con media cero, es decir

$$p(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{h^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

y coeficiente de correlación $C(\tau)$ también gaussiano, definido por

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \frac{B(\tau) - \langle h \rangle^2}{D(h)} = \\ &= \frac{\langle h(x_1)h(x_2) \rangle - \langle h(x_1) \rangle \langle h(x_2) \rangle}{\langle [h(x_1)]^2 \rangle - \langle h(x_1) \rangle^2} = \\ &= \frac{\langle h(x_1)h(x_2) \rangle}{\langle [h(x_1)]^2 \rangle} = e^{-\frac{\tau^2}{T^2}} \end{aligned}$$

donde

$$B(\tau) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L h(x) h(x+\tau) dx = \sigma^2 e^{-\frac{\tau^2}{T^2}} \quad (3)$$

entonces, utilizando un teorema de la teoría de procesos estocásticos⁽¹⁾, la distribución de pendientes es también gaussiana, es decir

$$p\left(\frac{dh}{dx}\right) = \frac{T}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 T^2}{4\sigma^2}} \quad (4)$$

donde $p(dh/dx) \cdot d(dh/dx)$ es la probabilidad de que la pendiente tenga un valor en el intervalo dh/dx y $dh/dx + d(dh/dx)$.

El difusor tiene una cara plana sobre la cual incide un haz monocromático y una cara rugosa donde las alturas satisfacen la estadística anteriormente descrita. Su índice de refracción es n_1 . El ángulo de incidencia es θ_0 y luego de atravesar la interfase plana se refracta formando un ángulo θ_1 con el eje z , como muestra la Fig. 1.

Podemos asociar ahora cada ángulo de difusión θ_2 con cada pendiente $dh/dx = \tan\psi$ (Fig. 2), de acuerdo a la ley de Snell, pues están conectados mediante una relación biunívoca.

Aplicando la ley de Snell:

$$n_1 \sin\theta_i = \sin\theta_t \quad (5)$$

y haciendo los reemplazos $\theta_i = \psi + \theta_1$ y $\theta_t = \psi + \theta_2$ de acuerdo a la convención de la figura 2, y operando, queda

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta_2 - n_1 \sin\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 - \cos\theta_2} \quad (6)$$

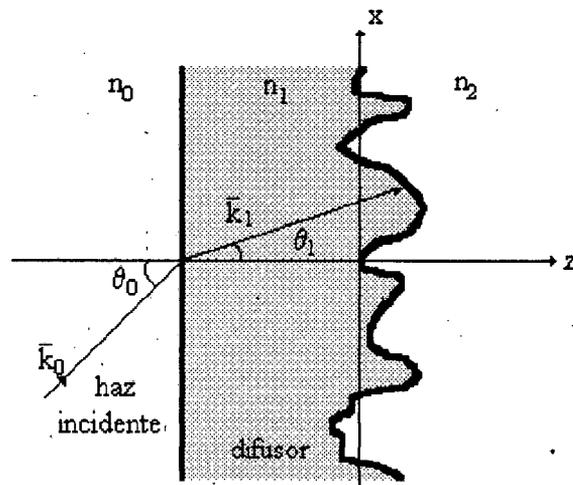


Figura 1.

Distribución de ángulos de dispersión

* Profesional de Apoyo Carrera CONICET

** Investigador CONICET

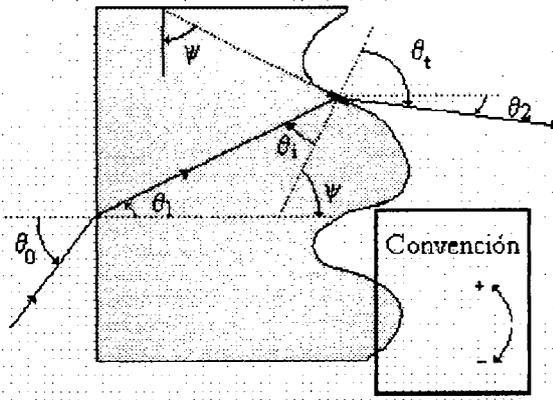


Figura 2

Ahora podemos escribir la densidad de probabilidad de que un rayo se disperse en la dirección θ_2

$$p_{\theta_2}(\theta_2) = p\left(\frac{dh}{dx}\right) \frac{d\left(\frac{dh}{dx}\right)}{d\theta_2} = p(\tan\psi) \frac{d(\tan\psi)}{d\theta_2} \quad (7)$$

evaluando la derivada

$$\begin{aligned} \frac{d(\tan\psi)}{d\theta_2} &= \frac{n_1 \cos\theta_2 \cos\theta_1 + n_1 \sin\theta_1 \sin\theta_2 - 1}{(n_1 \cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2} = \\ &= \frac{n_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - 1}{(n_1 \cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

así que

$$p_{\theta_2}(\theta_2) = e^{-\left[\frac{\sin\theta_2 - n_1 \sin\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 - \cos\theta_2} \frac{T}{2\sigma}\right]^2} \cdot \frac{n_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - 1}{(n_1 \cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2} \quad (9)$$

Ahora $p_{\theta_2}(\theta_2)d\theta_2$ es la probabilidad de que un rayo se disperse entre θ_2 y $\theta_2 + d\theta_2$

Cálculo de la intensidad media dispersada

Considerando que el campo dispersado en un ángulo θ_2 está dado por la contribución de todos los rayos dispersados en esa dirección, así que podemos escribir

$$E(\theta_2) = \sum_{j=1}^N e^{i\varphi_j} \quad (10)$$

donde N es el número de rayos que dispersados entre θ_2 y $\theta_2 + \delta\theta_2$ y es proporcional a $p_{\theta_2}(\theta_2)d\theta_2$.

Entonces, podemos escribir la intensidad media como

$$\begin{aligned} \langle I(\theta_2) \rangle &= \langle E(\theta_2) E^*(\theta_2) \rangle = \\ &= N + N(N-1) \langle e^{i\varphi_j - i\varphi_k} \rangle \quad (11) \\ &\quad (j \neq k) \end{aligned}$$

Podemos considerar que las fases φ_j y φ_k son independientes. Si además suponemos que están distribuidas uniformemente entre $-a$ y a , entonces tenemos para $\varphi_j \neq \varphi_k$

$$\begin{aligned} \langle e^{i\varphi_j - i\varphi_k} \rangle &= \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{i\varphi_j} d\varphi \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-i\varphi_k} d\varphi = \text{sinc}^2 a \end{aligned} \quad (12)$$

y reemplazando esto en (11) obtenemos

$$\langle |E(\theta_2)|^2 \rangle = N + N(N-1) \text{sinc}^2 a \quad (13)$$

Si estamos en el caso de luz blanca, o en el caso de $\sigma > \lambda$, para luz monocromática; las variaciones de fase serán muy grandes y estarán distribuidas uniformemente entre $-\pi$ y π . Esto lleva a $\text{sinc}^2 a = 0$ y obtenemos que la intensidad media dispersada es proporcional a N , y por lo tanto a $p_{\theta_2}(\theta_2)$.

$$\begin{aligned} \langle I(\theta_2) \rangle &\propto N \propto p_{\theta_2}(\theta_2) = \\ &= e^{-\left[\frac{\sin\theta_2 - n_1 \sin\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 - \cos\theta_2} \frac{T}{2\sigma}\right]^2} \cdot \\ &\quad \frac{n_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - 1}{(n_1 \cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

A continuación mostramos las curvas de la intensidad media dispersada por una superficie rugosa calculadas con la teoría de Beckmann⁽²⁾ (en la aproximación $\sigma > \lambda$), y por este modelo geométrico para ilustrar las diferencias.

Elegimos los parámetros involucrados en las dos expresiones de la siguiente manera: $\sigma = 8\mu\text{m}$, $T = 40\mu\text{m}$, $n_1 = 1.510$, $\lambda = .6328\mu\text{m}$. Además, en la figura 3 es $\theta_0 = \pi/6$ y en la figura 4, $\theta_0 = \pi/4$.

La línea vertical entera marca la dirección de transmisión si no hubiera superficie rugosa ($\theta_2 = \theta_0$), y la línea vertical punteada marca la dirección de transmisión si no hubiera cambio de índice de n_1 a n_2 , es decir la dirección $\theta_2 = \theta_1$.

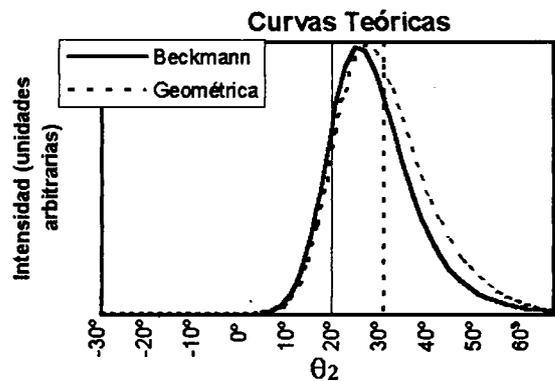


Figura 3. $\theta_0 = 30^\circ$

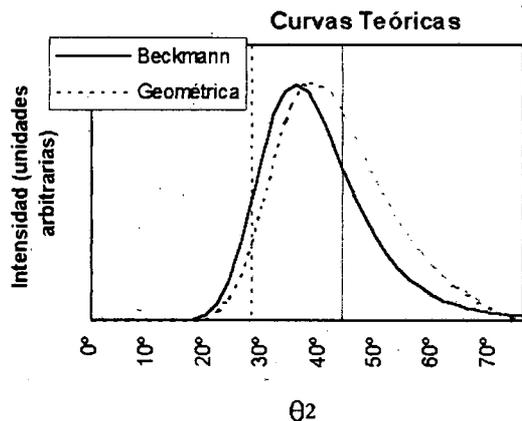


Figura 4. $\theta_0 = 45^\circ$

Dispositivo Experimental

El montaje experimental que utilizamos se muestra en la figura 5.

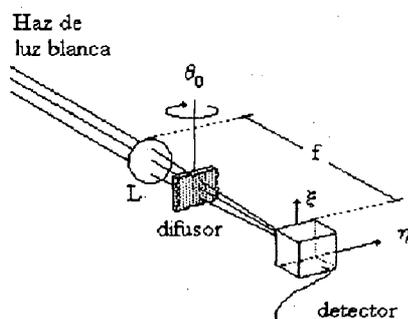


Figura 5. Dispositivo experimental

Realizamos el relevo de la curva de difusión para tres ángulos de incidencia distintos: $\theta_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/6$ y $\theta_0 = \pi/4$. La medición para $\theta_0 = 0$ permite determinar el parámetro $a = T/\sigma$, involucrado en la expresión teórica.

Resultados

Las figuras 6, 7 y 8 muestran los valores experimentales y las curvas teóricas dadas por la reformulación de la teoría de Beckmann y por el presente modelo geométrico.

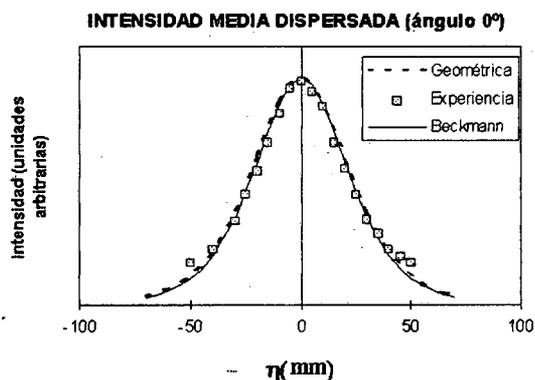


Figura 6.

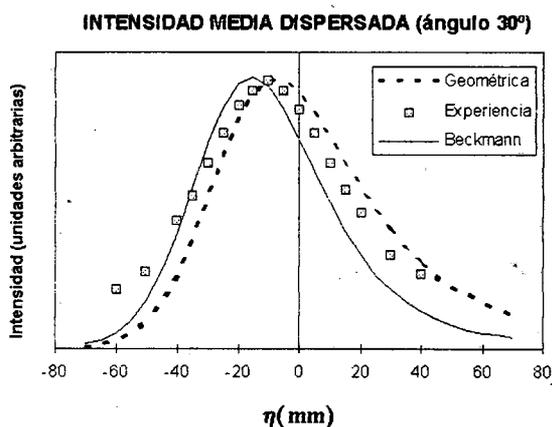


Figura 7.

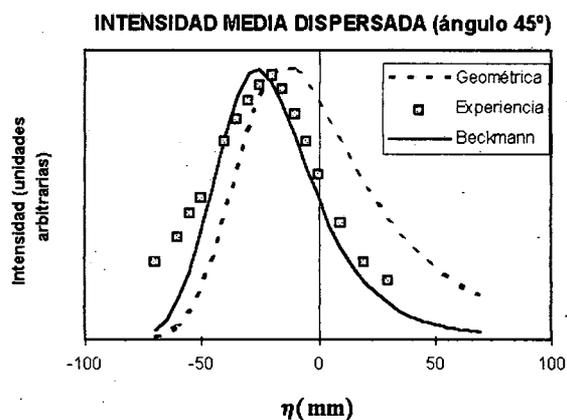


Figura 8.

CONCLUSIONES

El tratamiento geométrico de la difusión aquí desarrollado, predice un desplazamiento del máximo de la curva de difusión (efecto no refractivo), que es menor que el predicho por la teoría de Beckmann.

Los resultados experimentales confirman la predicción de que gran parte del efecto es geométrico, debido a que en promedio el ángulo de incidencia local disminuye a causa de la inclinación de los segmentos de la superficie.

Sin embargo, aunque observamos un desplazamiento, los datos experimentales no se ajustan a la curva teórica. El hecho de que las curvas teóricas no sean simétricas y los datos sí, responde al efecto de múltiple scattering que no está tenido en cuenta en ninguno de los dos modelos teóricos.

Por otra parte, pensamos que la diferencia entre los desplazamientos puede deberse a que la suposición de estadística gaussiana para las pendientes del difusor no sea del todo correcta.

REFERENCIAS

1. A. Papoulis, "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes", International Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, p. 475 (1975).

2. P. Beckmann and A. Spizzichino, "The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces", Pergamon, London (1963).