

El balance de energía como ligadura en el derrame de gotas

J. Diez*, R. Gratton†, L. Thomas‡, S. Betelú§, B. Marino
Instituto de Física Arroyo Seco, Facultad de
Ciencias Exactas, Universidad Nacional del
Centro de la Provincia de Buenos Aires,
Pinto 399, 7000, Tandil, Argentina

Abstract

Desde un punto de vista energético se estudia el derrame de gotas viscosas sobre una superficie lisa, por efecto de la tensión superficial (fuerza de Laplace). Se demuestra que, dentro de la hipótesis de deslizamiento y bajo las condiciones de contorno usuales de espesor nulo en el frente y ángulo de contacto dinámico igual al estático, el trabajo de las fuerzas en el borde de la gota es nulo, lo que constituye una condición deseable para que una descripción macroscópica sea autocontenida. Aquí mostramos que, cuando se emplea la hipótesis de altura de corte en vez de la de deslizamiento, el requerimiento de que dicho trabajo sea nulo conduce a una ecuación de ligadura para la altura, la pendiente y la derivada segunda en el frente que puede considerarse como la condición de contorno nece-

saria para cerrar el planteo del problema. Esta condición local es enteramente equivalente a una condición de carácter global que expresa el balance de la energía y que ya ha sido empleada exitosamente en un trabajo precedente. La condición de contorno local aquí desarrollada facilita la obtención de soluciones analíticas o numéricas, lo que valoriza los tratamientos fundados en la hipótesis de altura de corte.

1. Introducción

Este trabajo se refiere a la descripción hidrodinámica macroscópica del derrame de gotas sobre una superficie plana bajo la acción de la tensión superficial (fuerza de Laplace)[1, 2, 3, 4, 5, 6]. Nos restringiremos al caso en que los efectos de película delgada están concentrados en una región muy pequeña cerca del borde de la gota, que constituye (desde un punto de vista macroscópico) una línea de contacto móvil donde deben especificarse condiciones de contorno apropiadas. Sin embargo, es bien sabido[1, 7] que este tratamiento pre-

Researcher of Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET-Argentina)

Researcher of CONICET.

Researcher of CONICET.

Fellow of CONICET.

senta algunos aspectos intrincados tales como la divergencia de la tasa de disipación viscosa, si se trata de imponer ahí la condición natural de espesor nulo.

A los efectos de evitar esta singularidad esencial, se ha recurrido exitosamente[8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] a la relajación de la condición de contorno de no-deslizamiento en la vecindad de la línea de contacto. Esta hipótesis (denominada hipótesis de deslizamiento) permite que el espesor de la gota en el borde móvil (frente) pueda hacerse cero ($h_f = 0$). Para determinar el problema es necesaria una segunda suposición; por lo general, ésta consiste en la especificación de la pendiente h'_f en el frente (ángulo de contacto). Usualmente, este ángulo se toma igual al ángulo de contacto estático, θ_e , que vale cero para mojamiento completo. De esta manera, las magnitudes en el borde de la gota quedan apropiadamente especificadas y el problema está bien planteado. Sin embargo, si la hipótesis de deslizamiento tiene realidad física o si se trata meramente de un recurso matemático sigue siendo un problema abierto[15, 16].

Otra interesante posibilidad propuesta como alternativa a dicha hipótesis consiste simplemente en extender la descripción macroscópica sólo hasta donde el líquido tiene un cierto espesor (pequeño) $h_f \neq 0$, en algún punto próximo al frente[1, 17, 18, 19]. Sin embargo, esta hipótesis (denominada hipótesis de altura de corte) no ha sido aún reconocida como una alternativa útil, quizás porque la condición de contorno completa parece más difícil de especificar.

En este trabajo mostramos que plantear un

balance integral de energía, razonable para una descripción macroscópica autocontenida, es equivalente a una simple relación entre los parámetros que definen el frente. Esta relación, que adopta el rol de una condición de contorno, es satisfecha por la hipótesis de deslizamiento usual y provee, además, una expresión matemática suficiente para formular de manera completa la condición correspondiente a la altura de corte. Debe destacarse que el balance de energía en su forma primitiva de condición integral ha sido usado con anterioridad en conexión con la hipótesis de corte, permitiendo determinar soluciones en buen acuerdo con los experimentos[17, 18].

2. Balance energético

Considérese el derrame axial de una gota viscosa sobre una superficie horizontal bajo la acción de la tensión superficial. Por simplicidad, ignoramos la gravedad, si bien el esquema de razonamiento permitiría incluirla fácilmente de ser necesario. El balance global de energía es:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d\mathcal{F}}{dt} \quad (2.1)$$

donde dW/dt es el trabajo por unidad de tiempo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre la gota y $d\mathcal{F}/dt$ es la tasa de variación de la energía libre de Helmholtz. En efecto, no hay incremento de la energía cinética ya que se supone que el número de Reynolds es cero. El primer miembro de la Ec.(2.1) puede dividirse en dos términos,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_\Omega}{dt} + \frac{dW_f}{dt} \quad (2.2)$$

El primer término se refiere al trabajo de la fuerza de Laplace en el volumen Ω de la gota y el segundo corresponde a las fuerzas que actúan en el borde mismo (frente). La fuerza de Laplace aparece como consecuencia del salto de presión $p - p_0 = -\gamma c$ a través de la superficie libre de la gota; p_0 es la presión del gas ambiente, γ la tensión superficial y c la curvatura dada por:

$$c = x^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\alpha \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

dentro de la aproximación de lubricación usual en esta clase de problemas. En la Ec.(2.3) $\alpha = 0, 1$ corresponde a simetría plana y axial, respectivamente, y x es la coordenada en la dirección del derrame. La presión p en el interior de la gota no es uniforme y da lugar a una fuerza por unidad de volumen $\partial p / \partial x = -\gamma \partial c / \partial x$, que constituye la fuerza motora del flujo. El trabajo por unidad de tiempo realizado por esta fuerza es entonces:

$$\frac{dW_\Omega}{dt} = - \int_\Omega v \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega = \gamma \int_0^{x_f} (2\pi x)^\alpha h v \frac{\partial c}{\partial x} dx \quad (2.4)$$

donde x_f es la posición (macroscópica) del frente y v la componente horizontal de la velocidad promediada en la dirección vertical z .

En la hipótesis de deslizamiento la condición de contorno para la interfase líquido-sólido ($z = 0$) es,

$$v_x = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (2.5)$$

donde λ es una longitud característica del orden de 10^{-6} cm. Esta expresión se reduce a la condición de contorno usual de no deslizamiento para $\lambda = 0$ y $\partial v_x / \partial z$ finito. Bajo la aproximación de lubricación, las ecuaciones de

Navier-Stokes dan, entonces,

$$v_x(z) = \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial c}{\partial x} \left(hz - \frac{z^2}{2} + \lambda h \right) \quad (2.6)$$

donde μ es la viscosidad. De aquí, tenemos que

$$v = \langle v_x \rangle = \frac{\gamma}{3\mu} h(h + 3\lambda) \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2.7)$$

Además, la tasa de disipación viscosa dE_μ/dt , calculada como la suma de la disipación en el volumen Ω más la disipación en la superficie cubierta $\Sigma = \pi x_f^{\alpha+1}$, se escribe como:

$$\frac{dE_\mu}{dt} = \int_\Omega \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 d\Omega + \int_\Sigma v_x(0) \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right) d\Sigma \quad (2.8)$$

donde $d\Sigma = (2\pi x)^\alpha dx$ y $d\Omega = dz d\Sigma$. Reemplazando la Ec.(2.6) y empleando la Ec.(2.7), tenemos

$$\frac{dE_\mu}{dt} = 3\mu \int_0^{x_f} (2\pi x)^\alpha \frac{v^2}{(h + 3\lambda)} dx \quad (2.9)$$

Puede verse que si $\lambda = 0$ la tasa de disipación viscosa diverge para $h(x_f) = 0$. Por otro lado, nótese que multiplicando ambos lados de la Ec.(2.7) por $3\mu v (2\pi x)^\alpha dx / (h + 3\lambda)$ e integrando sobre todo el volumen Ω tenemos:

$$\frac{dE_\mu}{dt} = \frac{dW_\Omega}{dt} \quad (2.10)$$

que expresa, en términos energéticos, la información contenida en la ecuación de movimiento, esto es, que el trabajo hecho por la fuerza de Laplace en el volumen Ω es disipado completamente por la viscosidad en el mismo volumen.

Por otro lado, la energía libre de Helmholtz está localizada en las interfaces que contiene el

problema: a) la interfase líquido(L)-gas(G) de área $A(t)$ (superficie libre de la gota), b) la interfase líquido(L)-sólido(S) de área $\Sigma(t)$ cubierta por la gota y, c) la interfase sólido(S)-gas(G). Entonces, la energía a disposición para el derrame es:

$$\mathcal{F} = \int_A \gamma dA + \Sigma (\gamma_{SL} - \gamma_{SG}) \quad (2.11)$$

Definiendo el parámetro de derrame $S = \gamma_{SG} - \gamma_{SL} - \gamma$, tenemos:

$$\mathcal{F} = \gamma \int_0^{x_f} (2\pi x)^\alpha \sqrt{1 + h'^2} dx - \pi^\alpha x_f^{\alpha+1} (S + \gamma) \quad (2.12)$$

donde $h' = \partial h / \partial x$. Dentro de la aproximación de lubricación es $h'^2 \ll 1$; de modo que podemos escribir

$$\mathcal{F} = \frac{\gamma}{2} \int_0^{x_f} (2\pi x)^\alpha h'^2 dx - \pi^\alpha x_f^{\alpha+1} S \quad (2.13)$$

y su tasa de variación resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \gamma \int_0^{x_f} (2\pi x)^\alpha h' \frac{\partial h'}{\partial t} dx + \\ &\gamma (2\pi x_f)^\alpha v_f \left(\frac{h_f'^2}{2} - \frac{S}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

El integrando de esta ecuación puede escribirse como

$$x^\alpha h' \frac{\partial h'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (x^\alpha h' \dot{h}) + \frac{\partial}{\partial x} (x^\alpha h v c) - x^\alpha h v \frac{\partial c}{\partial x}$$

con $\dot{h} = \partial h / \partial t$; para ello hemos hecho uso de la definición de curvatura, Ec.(2.3), y de la ecuación de continuidad,

$$x^\alpha \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (x^\alpha v h) = 0 \quad (2.15)$$

De esta manera, la Ec.(2.14) queda:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= -\frac{dW_\Omega}{dt} + \\ &\gamma (2\pi x_f)^\alpha v_f \left(\frac{h_f'}{v_f} \dot{h}_f + h_f c_f + \frac{h_f'^2}{2} - \frac{S}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

donde el subíndice f indica que la función se evalúa en $x = x_f(t)$. En virtud de las Ecs.(2.1) y (2.2) el segundo término del miembro derecho corresponde al trabajo por unidad de tiempo de las fuerzas en el frente, esto es, dW_f/dt . Escribiendo la derivada local \dot{h}_f en términos de la derivada total dh_f/dt , tenemos que

$$\frac{dW_f}{dt} = -\gamma (2\pi x_f)^\alpha v_f \left[\frac{h_f'}{v_f} \frac{dh_f}{dt} + h_f h_f'' - \left(\frac{h_f'^2}{2} + \frac{S}{\gamma} \right) \right]$$

Nótese que la expresión entre paréntesis corresponde a la fuerza no balanceada en la línea de contacto, F_n , dividida por γ . En efecto, F_n viene dada por

$$F_n = \gamma_{SG} - \gamma_{SL} - \gamma \cos \theta_d \quad (2.16)$$

donde θ_d es el ángulo de contacto dinámico; tomando $\cos \theta_d \cong 1 - h_f'^2/2$ se llega fácilmente a

$$F_n = S + \gamma \frac{h_f'^2}{2} \quad (2.17)$$

En el caso de mojamiento parcial ($S < 0$), se sabe que la gota se derrame hasta que alcanza un estado de equilibrio, en el cual el ángulo de contacto estático viene dado por la condición de Young: $\cos \theta_e = 1 + S/\gamma$. Si en cambio, el mojamiento es completo tenemos que $\theta_e = 0$, lo que es equivalente a suponer que la energía asociada con S es completamente disipada por viscosidad

en el film precursor[1]. Así, la Ec.(2.16) puede escribirse convenientemente como

$$F_n = \gamma(\cos \theta_e - \cos \theta_d) \quad (2.18)$$

Si se adopta la hipótesis de deslizamiento, en la cual $h_f = 0$ y $\theta_d = \theta_e$, dW_f/dt se anula. En efecto, $dh_f/dt = 0$, el producto $h_f h_f''$ tiende a cero para $h_f \rightarrow 0$ ya que $h \rightarrow (x_f - x)^{3/2}$ (ver Ref. 15) y la fuerza neta F_n también se anula. En consecuencia, el balance de energía correspondiente a esta hipótesis se reduce a

$$-\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{dW}{dt} \quad (2.19)$$

lo cual constituye una condición deseable porque la descripción macroscópica es autocontenida. En efecto, toda la energía a disposición es igual al trabajo de la fuerza de Laplace (a la vez igual a la tasa de disipación viscosa entre 0 y x_f) y no hay flujo de energía a través de los contornos.

Analogamente, parece razonable imponer una condición similar para la hipótesis de altura de corte. Esto significa que cualquiera que sea el método empleado para definir el frente, debe mantenerse la condición (ver Ec.(??)):

$$\frac{h_f'}{v_f} \frac{dh_f}{dt} + h_f h_f'' = \frac{h_f'^2}{2} + \frac{S}{\gamma} = F_n \quad (2.20)$$

De esta manera, la ligadura global dada por el balance de energía, Ec.(2.19), se reduce a una ligadura local para ciertas magnitudes en el frente. Existen muchas formas de satisfacer esta relación; la más simple, y probablemente la más satisfactoria desde un punto de vista físico, es suponer $h_f = \text{const.}$ ($dh_f/dt = 0$). Para

mojamiento parcial una altura de corte natural podría ser $h_f = a/\theta_e^2$ (con a un tamaño molecular), mientras que para el caso de mojamiento completo el corte debería ser del orden del espesor del film precursor. Con esta suposición, el problema queda determinado al introducir una longitud característica h_f relacionada con la fenomenología microscópica, en analogía con el caso de la hipótesis de deslizamiento en la cual la longitud λ define el tamaño de la región donde el deslizamiento es dominante. La diferencia es que mientras en esta última las condiciones en el frente son $h_f = 0$ y $h_f' = \theta_e$, en la hipótesis de altura de corte éstas se reemplazan por un valor dado de h_f más la ligadura dada, entonces, por

$$h_f h_f'' = \frac{h_f'^2}{2} + \frac{S}{\gamma} = \frac{F_n}{\gamma} \quad (2.21)$$

Físicamente, esta ecuación puede interpretarse como un balance entre la fuerza de Laplace en el frente mismo y la fuerza neta de contacto.

3. Conclusión

En un trabajo previo[17] hemos complementado la hipótesis de corte con el balance de energía en forma de condición integral, lo cual ha permitido determinar la solución de la ecuación de movimiento por medio de un procedimiento algo complicado. Los resultados obtenidos mostraron un buen acuerdo con los experimentos, confirmando que una hipótesis del tipo de altura de corte junto con consideraciones energéticas provee un método alternativo confiable para describir la dinámica de los derrames. El resultado novedoso del presente trabajo es la

especificación de una condición equivalente de carácter local, que al involucrar sólo magnitudes en el frente facilita el uso de la aproximación de altura de corte.

References

- [1] P.G. de Gennes, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 827 (1985).
- [2] L. H. Tanner, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **12**, 1473 (1979).
- [3] Cazabat, M. A. Cohen Stuart, *J. Phys. Chem.* **90**, 5845 (1986); A. M. Cazabat, M. A. Cohen Stuart, *Phys. Chem. Hydrodynamics* **9**, 23 (1987); P. Levinson et al, *Revue Phys. Appl.* **23**, 1009 (1988).
- [4] J. D. Chen and N. Wada, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 3050 (1989); J. D. Chen and N. Wada, *Phys. Rev. Lett.* **148**, 207 (1992).
- [5] V.M. Starov, *Colloid. J. USSR* **45**, 1009 (1983).
- [6] M. Brenner, A. Bertozzi, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 593 (1993).
- [7] C. Huh and L. E. Scriven, *J. Colloid Interface Sci.* **25**, 85 (1971); E. B. Dussan V and S. Davis, *J. Fluid Mech.* **65**, 71 (1976).
- [8] E. B. Dussan V., *J. Fluid Mech.* **77**, 665 (1976).
- [9] L. M. Hocking, *J. Fluid Mech.* **79**, 209 (1977).
- [10] L. M. Hocking, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **34**, 37 (1981).
- [11] L. M. Hocking and A.D. Rivers, *J. Fluid Mech.* **121**, 425 (1982).
- [12] L. M. Hocking, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **36**, 55 (1983).
- [13] R. G. Cox, *J. Fluid Mech.* **168**, 169 (1986).
- [14] P. J. Haley, M.J. Miksis, *J. Fluid Mech.* **223**, 57 (1991).
- [15] L. M. Hocking, *J. Fluid Mech.* **239**, 671 (1992).
- [16] P. G. de Gennes, X. Hua and P. Levinson, *J. Fluid Mech.* **212**, 55 (1990); P. A. Thompson and M. O. Robbins, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 766 (1989).
- [17] J. A. Diez, R. Gratton, L. P. Thomas and B. Marino, *Phys. Fluids A* **6**, 24 (1994).
- [18] J. A. Diez, R. Gratton, L. P. Thomas and B. Marino, *J. Colloid Interface Sci.* **168**, 15 (1994).
- [19] L. Leger, J. F. Joanny, *Rep. Prog. Phys.*, 431-486 (1992).