INFLACIÓN ESTOCÁSTICA SIN APROXIMACIÓN DE RODADURA LENTA

M.Bellini*, H.Casini†, R.Montemayor†, P.Sisterna*

**Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*
Universidad Nacional de Mar del Plata
Funes 3350, (7600) Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina.

†Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro
CNEA - Universidad Nacional de Cuyo
E. Bustillo 9500, (8400) San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina.

Estudiamos el rango de validez del esquema de inflación estocástica sin imponer a priori la aproximación de rodadura lenta. Encontramos las condiciones generales que se satisfacen para que sea aplicable este formalismo e ilustramos los resultados con dos ejemplos con solución analítica.

We study the range of validity of the stochastic approach to inflation without imposing a priori the slow-roll condition approximation. We find the general conditions for this formalism to hold, and ilustrate the results with two analytically solvable examples.

I. INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha despertado mucho interés el tratamiento estocástico de modelos inflacionarios para el universo [1]. Este enfoque describe la dinámica de los modos de onda larga de un campo escalar ϕ, que guía la expansión de la geometría de fondo. La estructura global del universo es dada por la distribución de probabilidad $P(\phi, t)$ de encontrar una configuración dada de campo ϕ en el instante t. Usualmente estas distribuciones se han calculado utilizando la aproximación de rodadura lenta, $\ddot{\phi} \sim 0$. En este trabajo estudiamos el dominio donde es válida una descripción clásica estocástica efectiva sin utilizar dicha aproximación.

II. DINÁMICA SEMICLÁSICA DEL INFLATÓN

El lagrangiano para el campo del inflatón es [2]:

$$\mathcal{L}(\varphi, \varphi_{,\mu}) = -\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu}\right) + V(\varphi)\right]$$
$$= \frac{a^3}{2}\left(\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{a^2}(\nabla\varphi)^2 - 2V(\varphi)\right) \tag{1}$$

donde usamos la métrica de Friedman-Robertson-Walker, $ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\, d\vec{r}^2$. Si al campo escalar lo descomponemos en su valor medio más fluctuaciones, $\varphi = \phi_{cl} + \phi$ con $<\phi>= 0$, y consideramos sólo hasta términos lineales en ϕ, las ecuaciones de movimiento se reducen a dos ecuaciones clásicas que dan la evolución del parámetro de Hubble con el tiempo:

$$\ddot{\phi}_{cl} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi_{cl} + 3H\dot{\phi}_{cl} + V'(\phi_{cl}) = 0 \tag{2}$$

$$H^2 = \frac{4\pi^2}{3M_p^2}[\dot{\phi}_{cl}^2 + (\vec{\nabla}\phi_{cl})^2 + 2V(\phi_{cl})] \tag{3}$$

y una ecuación operatorial:

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi + 3H\dot{\phi} + V''(\phi_{cl})\phi = 0 \tag{4}$$

En esta última H y V_{cl}'' son funciones de t dadas por (2) y (3).

El análisis de la Ec.(4) se simplifica si redefinimos el campo tal que la ecuación de movimiento no tenga un término con derivada primera, $\phi = e^{-\frac{3}{2}\int dt\, H}\chi$. Así tenemos:

$$\ddot{\chi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\chi + [V_{cl}'' - \frac{9}{4}H^2 - \frac{3}{2}\dot{H}]\chi = 0 \tag{5}$$

donde χ es operador de campo escalar libre con parámetro de masa función de t.

Suponiendo que el campo ϕ_{cl} es homogéneo, de las ecuaciones clásicas se obtiene para el parámetro de Hubble la siguiente ecuación diferencial:

$$H^2 - \frac{M_p^2}{12\pi^2}H'^2 = \frac{8\pi^2}{3M_p^2}V(\phi_{cl}) \tag{6}$$

La dependencia temporal de ϕ_{cl} está dada por $\dot{\phi}_{cl} = -\frac{M_p^2}{4\pi^2}H'$. En la aproximación de rodadura lenta es simplemente $H_s^2 = \frac{8\pi^2}{3M_p^2}V(\phi_{cl})$.

A. Dinámica de las fluctuaciones cuánticas

Definiendo los modos:

$$\chi = \int d^3k[a_k\chi_k(\vec{r}, t) + h.c.] \tag{7}$$

y considerando que en la ecuación diferencial (5) los coeficientes dependen de t, pero no de $\vec{r}$, podemos escribir

$\chi_k(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{k}.\vec{r}}\xi_k(t)$. El factor que contiene a la dependencia temporal satisface:

$$\ddot{\xi}_k(t) + \omega_k^2 \xi_k(t) = 0 \tag{8}$$

con $\omega_k^2 = \frac{\vec{k}^2}{a^2} + \left[V_{cl}" - \frac{9}{2}H^2 - \frac{3}{2}\dot{H}\right]$. La frontera entre el comportamiento senoidal y exponencial de las soluciones está dada por:

$$k_o^2 = a^2 \left[\frac{9}{4}H^2 + \frac{3}{2}\dot{H} - V_{cl}"\right] \tag{9}$$

Así tenemos un sector infrarrojo (modos de longitud de onda larga) inestable ($\vec{k}^2 < k_o^2$), y un sector de modos de longitud de onda corta ($\vec{k}^2 > k_o^2$) estable. Debido a la inflación modos de longitud de onda corta pasan al sector infrarrojo y se desestabilizan.

La contribución de los modos de longitud de onda larga está dada por:

$$\chi_L = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k\theta(\epsilon k_o - k)[a_k e^{i\vec{k}.\vec{r}}\xi_k(t) + h.c.] \tag{10}$$

donde $\epsilon << 1$. La dinámica de las componentes de onda larga está dada por:

$$\ddot{\chi}_L - \epsilon(\ddot{k}_o\eta + 2\dot{k}_o\kappa + \dot{k}_o\lambda) - \frac{k_o^2}{a^2}\chi_L = 0 \tag{11}$$

con los operadores η, κ y λ definidas de acuerdo a:

$$\eta = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k\delta(\epsilon k_o - k)[a_k e^{i\vec{k}.\vec{r}}\xi_k(t) + h.c.] \tag{12}$$

$$\kappa = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k\delta(\epsilon k_o - k)[a_k e^{i\vec{k}.\vec{r}}\dot{\xi}_k(t) + h.c.] \tag{13}$$

$$\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k\dot{\delta}(\epsilon k_o - k)[a_k e^{i\vec{k}.\vec{r}}\xi_k(t) + h.c.] \tag{14}$$

A partir de las relaciones canónicas de conmutación para los operadores de creación y aniquilación de los modos, $[a_k, a_{k'}] = \left[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\right] = 0$ y $\left[a_k, a_{k'}^\dagger\right] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$, se puede calcular el álgebra de los operadores que aparecen en las ecuaciones de movimiento:

$$[\chi_L(\vec{r},t), \eta(\vec{r}',t)] = [\chi_L(\vec{r},t), \lambda(\vec{r}',t)]$$
$$= [\lambda(\vec{r},t), \eta(\vec{r}',t)] = 0 \tag{15}$$

$$[\chi_L(\vec{r},t), \kappa(\vec{r}',t)] = i\epsilon\left(\frac{k_o}{2\pi}\right)^2 \frac{sen(\epsilon k_o R)}{k_o R}\, g(k_o) \tag{16}$$

$$[\eta(\vec{r},t), \kappa(\vec{r}',t)] = \frac{i}{2\pi^2}\epsilon\frac{k_o^2}{d_o}\delta(t-t'), \tag{17}$$

con $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$. Introducir un corte en las frecuencias ha generado una teoría no local. Cuando $R >> (\epsilon k_o)^{-1}$, todos los conmutadores se anulan, lo que permite interpretar la dinámica del campo χ_L como una teoría cuántica unidimensional en cada dominio.

La dificultad fundamental para interpretar estas ecuaciones como clásicas radica en el operador κ, que en un dominio dado no conmuta con χ, η ni λ, mientras que estos últimos sí lo hacen entre si. Esta limitación sólo es superada cuando la contribución a la ecuación de movimiento de κ es despreciable frente a la de η o λ. Pero el término de ruido no conmutante con χ es ambiguo ya que se lo puede modificar sumándole un múltiplo arbitrario de η y restándolo de la ecuación. Para definirlo minimizamos la correlación de los ruidos modificados. Caracterizándolos por los valores medios cuadráticos de los operadores, la condición que asegura la validez de un formalismo clásico estocástico es:

$$\left|\frac{k\dot{\chi}_k}{\dot{k}\chi_k}\right|_{k=k_o} << 1. \tag{18}$$

Cuando el fondo es un espacio tiempo de *de Sitter* y el campo es libre, esta condición se reduce a una ya obtenida por Mijic [4] en un contexto diferente. Esta es una condición necesaria para la existencia de un régimen clásico, pero debe ser complementada con un análisis de las relaciones de decoherencia. Este aspecto es considerado en la Ref. [5]. Su contenido depende del modelo considerado y cuando se satisface tenemos una ecuación de segundo orden:

$$\ddot{\chi}_L - \frac{k_o^2}{a^2}\chi_L = \epsilon\left[\frac{d}{dt}(\dot{k}_o eta) + \dot{k}_o R\eta\right] \tag{19}$$

que podemos interpretar como clásica estocástica, donde $R = \left|Re\frac{\dot{\xi}_k}{\xi_k}\right|_{\epsilon k_o}$, η es un ruido gausiano y $\dot{\eta}$ tiene una estructura mucho más complicada. Introduciendo una variable auxiliar u se puede replantear esta ecuación como un sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\dot{\chi}_L = \epsilon\dot{k}_o\eta + u \tag{20}$$

$$\dot{u} = \frac{k_o^2}{a^2}\chi_L + \epsilon\dot{k}_o R\eta \tag{21}$$

o en forma más compacta, como una ecuación de Langevin bidimensional:

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}(t), t) + a_{ij}(t)\, r_j(t) \qquad i,j = 1,2 \tag{22}$$

con

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \chi_L \\ u \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{k_o^2\chi_L}{a^2} \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$a = \begin{pmatrix} \epsilon\dot{k}_o & 0 \\ \epsilon\dot{k}_o R & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

De ella se deriva una ecuación de Fokker-Planck bidimensional que da la evolución de la densidad de probabilidad:

$$\partial_t P(\vec{x}, t|\vec{y}, s) = \left[-\vec{f}(\vec{x}, t|\vec{y}, s).\nabla_x + \frac{\epsilon\dot{k}_o}{2\pi}\sqrt{\frac{\epsilon}{2\dot{k}_o}}|\xi_k|_{k=\epsilon k_o} a_{ik}a_{kj}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right] P(\vec{x}, t|\vec{y}, s). \tag{24}$$

III. EJEMPLOS

En esta sección consideraremos dos ejemplos que ilustran la condición de validez para una descripción clásica estocástica efectiva.

A. Ejemplo 1: inflación exponencial

Tomemos el caso más simple para el cual el parámetro de Hubble es constante $H = H_o$. Como consecuencia de esto el potencial escalar también lo es ($V = V_o$), y viene dado por la expresión

$$H_o^2 = \frac{4\pi^2}{3M_p^2} V_o. \tag{25}$$

Bajo éstas condiciones tendremos

$$\frac{k_o^2}{a^2(t)} = \frac{9}{4} H_o^2. \tag{26}$$

donde el factor de escala está dado por

$$a(t) = a_o\, e^{H_o t}. \tag{27}$$

La ecuación de movimiento para el campo clásico será

$$\dot{\phi}_{cl} = 0, \tag{28}$$

y por lo tanto el campo clásico será constante durante el estadío inflacionario, esto es

$$\phi_{cl} = \phi_o^{cl}. \tag{29}$$

La ecuación de modos en el sector inestable viene dada por

$$\ddot{\xi}_k(t) + \left[\frac{k^2}{a^2(t)} e^{-2H_o t} - \frac{9}{4} H_o^2\right] \xi_k(t) = 0. \tag{30}$$

La solución general a esta ecuación en un campo no masivo es (para $x = e^{-H_o t}$, $\nu = \frac{3}{2} H_o$)

$$\xi_k(t) = A_1 H_\nu^{(1)}(\frac{k}{H_o} x) + A_2 H_\nu^{(2)}(\frac{k}{H_o} x). \tag{31}$$

donde $H_\nu^{(1)}$ y $H_\nu^{(1)}$ son las funciones de Hankel de primer y segundo orden, respectivamente. La condición para que el sistema se pueda describir con una aproximación estocástica efectiva es en este caso:

$$\frac{27}{16} \epsilon^3 << 1, \tag{32}$$

que se satisface en todo instante, siempre que se elija ϵ suficientemente pequeño.

B. Ejemplo 2: inflación potencial

A continuación vamos a considerar un ejemplo que corresponde a la inflación potencial. Si tomamos como punto de partida la siguiente relación entre el parámetro de Hubble y el campo del inflatón:

$$H = \alpha e^{b\phi_{cl}} \tag{33}$$

tenemos:

$$\dot{\phi}_{cl} = \frac{M_p^2}{4\pi} H' = -\frac{\alpha b M_p^2}{4\pi} e^{b\phi_{cl}} \tag{34}$$

con lo cual resulta:

$$\phi_{cl} = -ln \left[\frac{\alpha b^2 M_p^2}{4\pi^2}(t + c)\right]^{\frac{1}{b}} \tag{35}$$

y

$$H = \left(\frac{4\pi}{bM_p}\right)^2 \frac{1}{t + c} \tag{36}$$

Definiendo $p = \left(\frac{4\pi}{bM_p}\right)^2$ y $\tau = t + c$, el potencial responsable de este comportamiento es:

$$V = \frac{3}{2p} \left(\frac{\alpha}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3p}\right) e^{2b\phi_{cl}} \tag{37}$$

La evolución de la métrica está dada por:

$$H = \frac{p}{\tau} \qquad a(t) = d\tau^p \tag{38}$$

Como se ve, la relación (33) efectivamente da lugar a inflación potencial. En este caso el umbral para la región infrarroja inestable es:

$$k_o^2 = \frac{d^2\alpha^2}{2} \left(\frac{9p^2}{2} - 15p + 4\right) \tau^{2(p-1)} \tag{39}$$

La solución general de la ecuación (8), que define los modos es:

$$\xi_k(t) = \sqrt{\frac{t}{d(1-p)}} \left[C_1 H_\nu^{(1)} \left(\frac{k}{d(1-p)} t^{1-p}\right) + C_2 H_\nu^{(2)} \left(\frac{k}{d(1-p)} t^{1-p}\right)\right] \tag{40}$$

con $\nu = \frac{\sqrt{\frac{9}{4}p^2 - \frac{15}{2}p + \frac{9}{4}}}{p-1}$. Si en particular consideramos el vacío adiabático, $C_1 = 0$, podemos verificar que para que sea válida la descripción estocástica se debe cumplir que

$$\frac{4\pi \left(\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\nu^2 - \frac{1}{(2(p-1))^2}}\right)^{2\nu}}{(1 + 2\nu)\Gamma^2(\nu)} << 1, \tag{41}$$

que se satisface aún para valores de p cercanos al límite inferior permitido para que haya un sector de frecuencias imaginarias, $p \approx 3$, siempre que $\epsilon \leq 0.1$. Por otra parte la condición de rodadura lenta se cumple si $p >> 1$. Se observa que en el límite de p grande la condición es idéntica a la de inflación exponencial.

IV. COMENTARIOS FINALES

En este trabajo analizamos las condiciones que deben satisfacerse para que una aproximación semiclásica para la dinámica inflacionaria pueda reducirse a una descripción efectiva clásica estocástica. Hemos mostrado una generalización a la aproximación usual, basada en la eliminación del término $\ddot{\phi}$ en las ecuaciones cosmológicas y que conduce a la formulación de Starobinsky, y hemos establecido cuáles son las condiciones de validez de nuestras ecuaciones, en general más amplias que las de rodadura lenta. Incluso cuando es posible construir una teoría clásica efectiva éste no necesariamente se reduce a la desarrollada en base a la aproximación mencionada, sino que queda caracterizada en general por una ecuación de Fokker-Planck bidimensional.

---

[1] A.H.Guth and S.Y.Pi, Phys. Rev. Lett. **49**, 1110 (1982); A.A.Starobinsky, Phys. Lett. **B117**, 175 (1982); A.D.Linde, Rep. Prog. Phys. **108**, 389 (1982); A.A.Starobinsky, in *Current Topics in Field Theory, Quantum Gravity, and Strings*, ed. by H.J. de Vega and N.Sánchez, Lecture Notes in Physics 226 (Springer, New York, 1986); A.D.Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood, Chur, Switzerland, 1990), A.D.Linde D.A.Linde and A.Mezhlumian, Phys. Rev. **D50**, 730; 2456 (1994).

[2] E.W.Kolb and M.S.Turner, *The Early Universe*, Frontiers in Physics **69** (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1990).

[3] S.Habib,Phys. Rev. **D46**, 2408 (1992).

[4] M.Mijic, Phys. Rev. **D49**, 6434 (1994).

[5] M.Bellini, H.Casini, R.Montemayor y P.Sisterna, *Stochastic approach to inflation: classicality conditions*, por publicarse en Phys. Rev. **D**.