FORMALISMO CANÓNICO EXTERIOR EN LA GRAVEDAD LINEAL (1+1) Y SU CONFRONTACIÓN CON EL MÉTODO DE FADDEEV-JACKIW

A. Foussats, E. Manavella, C.E. Repetto, O.P. Zandron y O.S. Zandron
Instituto de Física Rosario, Universidad Nacional de Rosario,
Bvd. 27 de Febrero 210 bis, 2000 Rosario, Argentina

La gravedad lineal en dimensión (1+1) se utiliza frecuentemente como laboratorio teórico para estudiar diversas propiedades que también están presentes en teorías de la gravedad de mayores dimensiones.
En este trabajo se desarrolla el formalismo Hamiltoniano de segundo orden para la gravedad lineal en dimensión (1+1). Con este propósito se construye primeramente el formalismo canónico exterior geométrico de primer orden y luego se lleva a cabo la descomposición espacio-tiempo y se estudia el álgebra de los vínculos de primera clase. Se confrontan los resultados con los que se obtienen mediante el método simplético de Faddeev-Jackiw.

Two-dimensional lineal gravity is often used as theoretical laboratory to study several properties also present in gravities of other dimensions.
The second order Hamiltonian formalism for the (1+1) Jackiw-Teitelboim model is considered. We start by considering the first order exterior canonical formalism, arising from the group-manifold approach to gravity. Next, the space-time decomposition is carried out and the algebra of first class constraints is found. The results are compared with those obtained by means of the symplectic Faddeev-Jackiw quantisation method.

00.04.65 +e

INTRODUCCIÓN

En 3 y 4 dimensiones, la gravedad con todos sus posibles acoplamientos a campos de materia y partículas pueden formularse como teoría de gauge del grupo de Poincaré. Sin embargo, es en el caso de 3 dimensiones en el cual la formulación de la gravedad como teoría de gauge es particularmente interesante, cuando la acción de Einstein-Hilbert puede escribirse como un término de Chern-Simons puro.

En dimensión (1+1) el tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ se anula idénticamente, de tal manera que las ecuaciones de campo de Einstein son las del vacío. Hace algunos años se propusieron una clase de teorías de la gravedad en dos dimensiones, en lugar de la relatividad general. Desde entonces se estudiaron varios modelos, pero dos de ellos parecen tener un particular interés, tanto por su simplicidad como por sus propiedades teóricas en el marco de grupos de Lie. El primero es el llamado modelo de la gravedad de Liouville[1]. En este modelo la curvatura escalar R se iguala a una constante cosmológica Λ. Para tratar esta teoría a partir de un principio de acción, se requiere un campo escalar adicional η que actúa como un multiplicador de Lagrange y lleva a la ecuación de movimiento para R.

La gravedad de Liouville se obtiene a partir de la acción:

$$I_1 = \int d^2x \sqrt{-g}\,\eta\ (R - \Lambda)\,. \tag{1.1}$$

El segundo modelo fue introducido como un modelo en dos dimensiones inspirado en la teoría de cuerdas, y lleva a una interesante solución que exhibe todos los rasgos principales, característicos de la geometría de agujero negro[2]. Su acción es:

$$I_2 = \int d^2x \sqrt{-\overline{g}}\ \left(\eta\overline{R} - \Lambda\right)\ , \tag{1.2}$$

donde $\eta = e^{-2\varphi}$, siendo φ el campo del dilatón y $\overline{R}$ es la curvatura escalar que corresponde al tensor métrico $\overline{g}_{\mu\nu} = e^{-2\varphi}g_{\mu\nu}$.

Con referencia al primer modelo, propuesto inicialmente por Jackiw y Teitelboim, se puede obtener la extensión supersimétrica. Esta formulación está basada en el álgebra graduada de de Sitter OSP(1,1/1)[3]:

$$\begin{aligned}
[P_a, P_b]_- &= -\frac{1}{4}\lambda\varepsilon_{ab}J\ ,\ [P_a, J]_- = \varepsilon_{ab}P^b\ ,\\
[Q_\alpha, J]_- &= \frac{1}{2}\left(\gamma^5\right)_{\alpha\beta}Q_\beta\ ,\ [P_a, Q_\alpha]_- = \frac{1}{4}\lambda\left(\gamma_a\right)_{\alpha\beta}Q_\beta\\
[Q_\alpha, Q_\beta]_+ &= -2i\left(\gamma^a\right)_{\alpha\beta}P_a + i\lambda\left(\gamma^5\right)_{\alpha\beta}J\ .
\end{aligned} \tag{1.3}$$

En este caso, el producto interno (graduado) invariante y no-degenerado dado por:

$$\langle P_a, P_b\rangle \equiv h_{ab}\ ,\ \langle J, J\rangle \equiv \frac{4}{\lambda^2}\ ,\ \langle Q_\alpha, Q_\beta\rangle \equiv -\frac{8i}{\lambda}\varepsilon_{\alpha\beta}\ , \tag{1.4}$$

se utiliza para escribir la siguiente acción

$$S = \int d^2x\, \varepsilon^{\mu\nu}\langle\eta, F_{\mu\nu}\rangle\ . \tag{1.5}$$

donde $F = dA + A^2$ es la 2-forma intensidad de campo asociada al campo de gauge

$$A_\mu = V_\mu^a P_a - \omega_\mu J + \frac{1}{2}\chi_\mu^\alpha\left(\gamma^5\right)_\alpha^{\ \beta}Q_\alpha\ , \tag{1.6}$$

y $\eta = \eta^a P_a + \eta^J J + \eta^\alpha Q_\alpha$ es un escalar con valores en el álgebra graduada. Esta acción es explícitamente invariante topológica y de gauge. Es importante remarcar que ésta se define en una superficie ordinaria bidimensional.

En el presente trabajo nos ocuparemos sólo del sector bosónico, dejando para uno próximo la extensión de los resultados al caso supersimétrico.

La acción del modelo inicialmente propuesto por Jackiw y Teitelboim, en componentes se escribe:

$$S = \int d^2x \, \left[\eta^a \, \varepsilon^{\mu\nu} \left(\partial_\mu V_{a\nu} - \varepsilon_{ab}\, \omega_\mu V^b_\nu\right) - \frac{4}{\lambda^2}\eta^J \varepsilon^{\mu\nu}\left(\partial_\mu \omega_\nu + \frac{1}{8}\lambda^2 \varepsilon^{ab} V_{a\mu} V_{b\nu}\right)\right] . \tag{1.7}$$

donde los índices $a, b = 1, 2$ y $\mu, \nu = 0, 1$.

I. FORMALISMO CANÓNICO EXTERIOR

Para desarrollar el formalismo canónico exterior[4] se parte de la 2-forma Lagrangiana, la cual se obtiene a partir de la acción anterior. Dicha 2-forma contiene los siguientes campos independientes: las 1-formas conexión espinorial ω y el zweibein V^a, las cuales son los campos de gauge del modelo; y las 0-formas η^J y η_a:

$$\mathcal{L} = \eta_a R^a - \frac{4}{\lambda^2}\eta^J R - \frac{1}{2}\eta^J V^a \wedge V^b \, \varepsilon_{ab} \, , \tag{2.1}$$

donde la curvatura R y la torsión R^a están dadas respectivamente por:

$$R = d\omega \, , \tag{2.2a}$$

$$R^a = dV^a - \omega \wedge V_b \, \varepsilon^{ab} \, . \tag{2.2b}$$

A partir de este Lagrangiano se construyen los momentos canónicos conjugados de los campos independientes $\mu^A \equiv (V^a, \omega, \eta_a, \eta^J)$ derivando respecto a las "velocidades" $d\mu^A$.

Los momentos correspondientes a los campos de gauge son 0-formas y los restantes resultan ser 1-formas y generan los siguientes cuatro vínculos primarios:

$$\Phi_a(V) = \pi_a(V) - \eta_a \approx 0 \, , \tag{2.3a}$$

$$\Phi(\omega) = \pi(\omega) \approx 0 \, , \tag{2.3b}$$

$$\Phi^a(\eta_a) = \pi^a(\eta_a) \approx 0 \, , \tag{2.3c}$$

$$\Phi_J(\eta^J) = \pi_J(\eta^J) - \frac{4}{\lambda^2}\omega \approx 0 \, . \tag{2.3d}$$

Todos estos vínculos son de segunda clase, ya que tienen al menos un corchete de Poisson con otro vínculo distinto de cero.

Se puede construir ahora el Hamiltoniano total:

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_{can} + \Lambda^A \wedge \Phi_A \, , \tag{2.4}$$

donde $\mathcal{H}_{can} = d\mu^A \wedge \Pi_A - \mathcal{L}$ está dado por:

$$\mathcal{H}_{can} = \left(\eta_a \, \omega \wedge V_b \, + \frac{1}{2}\eta^J V_a \wedge V_b\right) \varepsilon^{ab} \, . \tag{2.5}$$

Utilizando la definición y propiedades de los corchetes entre formas[4], el cálculo de los corchetes entre los vínculos y el hamiltoniano total H_T permite hallar las ecuaciones de movimiento para los campos, en el formalismo canónico exterior. Esto conduce a la no existencia de vínculos secundarios. Luego todos los vínculos son primarios y es posible además mostrar que ellos son de segunda clase. Las ecuaciones de movimiento se escriben:

$$d\Phi_a(V) = \left[\eta^b \omega \varepsilon_{ab} + \eta^J V^b \varepsilon_{ab} - d\eta_a\right] \approx 0 \tag{2.6a}$$

$$d\Phi(\omega) = \left[\eta_a V_b \, \varepsilon^{ab} + \frac{4}{\lambda^2} d\eta^J\right] \approx 0 \tag{2.6b}$$

$$d\Phi^a(\eta_a) = - \left[\omega \wedge V_b \, \varepsilon^{ab} - dV^a\right] \approx 0 \tag{2.6c}$$

$$d\Phi_J(\eta^J) = - \left[\frac{1}{2} V^a \wedge V^b \, \varepsilon_{ab} + \frac{4}{\lambda^2} d\omega\right] \approx 0 \, . \tag{2.6d}$$

Hacemos notar que la ecuación (2.6a,b) expresan reonomía. Es decir, a partir de (2.6a) vemos que $\eta^J \varepsilon_{ab}$ es la componente interna de la 1-forma curvatura $\mathcal{D}\eta_a$; mientras que de (2.6b) vemos que $-\frac{\lambda^2}{4}\eta_a \; \varepsilon^{ab}$ es la componente interna de la 1-forma curvatura $\mathcal{D}\eta^J = d\eta^J$.

Con la finalidad de hallar explícitamente el conjunto de vínculos de primera clase, es necesario hacer la descomposición espacio-tiempo[5] en la variedad para poder hallar el Hamiltoniano usual del sistema como generador de evoluciones temporales. Es útil introducir las funciones "shift" N^i y "lapse" $N^\perp$ las cuales determinan las componentes del tensor métrico. Las componentes holónomas del zweibein $V_a = {}^2L_{a\mu} \, dx^\mu$ se separan:

$$^2L_{ai} = {}^1L_{ai} = L_{ai} \;\; , \;\; {}^1L^i_a = L^i_a \;\; ,$$

$$^2L^i_a = {}^1L^i_a + (N^\perp)^{-1} N^i n_a \, , \tag{2.7}$$

donde la normal n_a a la superficie satisface: $n_a n^a = -1$, $n_a L^a_i = 0$, $n_a = -N^\perp \, {}^2L^0_a$ y $(-{}^2g)^{1/2} = N^\perp g^{1/2}$.

Luego:

$$\int \mathcal{H}_T = \int dx^0 \wedge \widetilde{\mathcal{H}} \, , \tag{2.8}$$

donde la 1-forma $\widetilde{\mathcal{H}}$ está dada por:

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \int dx \left(\frac{1}{2}\, \omega^{ab}_0 \, \mathcal{H}_{ab} + L_{a0} \, \mathcal{H}^a\right) \, , \tag{2.9}$$

con:

$$\mathcal{H}_{ab} \, dx = (\Psi_a V_b - V_a \Psi_b) \approx 0 \tag{2.10a}$$

$$\mathcal{H}^a \, dx = \frac{1}{4\pi}\left[-d\eta^a + \eta^J V_b \, \varepsilon^{ab} + \omega \, \varepsilon^{ab}\,(\eta_b + 4\pi\Psi_b)\right] \approx 0 \, . \tag{2.10b}$$

y donde se ha llamado $\Psi_a = \Phi_a \,|_\Sigma = (\pi_a - \eta_a)\,|_\Sigma = \Pi_a - \eta_a \approx 0$.

Para obtener las ecuaciones (2.10) que corresponden al formalismo de segundo orden, se tomaron ceros fuerte las ecuaciones (2.6a) y (2.6b). Esta última permite despejar $\omega^{ab}_\mu = \omega_\mu \varepsilon^{ab} = {}^2\omega^{ab}_\mu = -V^a_\mu \; \varepsilon^{\nu\rho} \; \partial_\nu V_{a\rho}$

que como es usual la componente espacial se escribe en función de la curvatura extrínseca K_{ji} como sigue:

$$ {}^2\omega_i^{ab} = {}^1\omega_i^{ab} + (n^b L^{aj} - n^a L^{bj}) K_{ji} \, . \qquad (2.11) $$

Es de hacer notar que a partir del formalismo geométrico exterior, el vínculo (2.10a) aparece naturalmente. Este vínculo no es más que el generador J_{ab} de las rotaciones locales de Lorentz que es una densidad, y en este modelo toma la forma:

$$ \begin{aligned} J_{ab} &= \Psi_a^i L_{bi} - \Psi_b^i L_{ai} = \Pi_a^i L_{bi} - \Pi_b^i L_{ai} \\ &+ \frac{4}{\lambda^2} g^{1/2} \left(n_a L_b^i - n_b L_a^i \right) \partial_i \eta^J \, , \end{aligned} \qquad (2.12) $$

donde se ha definido $\Psi_a^i = \Psi_a \varepsilon^{0i} N^{\perp} g^{1/2}$ y análogamente Π_a^i.

Finalmente, introduciendo el impulso canónico del tensor métrico g_{ij} , $\pi^{ij} = \Pi_a^i L^{aj} + \Pi_a^j L^{ai}$, llamando $\bar{\pi}^J = \pi^J + \frac{g^{1/2}}{\pi \lambda^2} n_a L_b^i \, {}^1\omega^{ab}$, y teniendo en cuenta la descomposición:

$$ L_{a0} \mathcal{H}^a = N^{\perp} \mathcal{H}_{\perp} + N^i \mathcal{H}_i \, , \qquad (2.13) $$

los dos vínculos restantes de primera clase, que conjuntamente con (2.12) cierran el álgebra de Poincaré se escriben:

$$ \mathcal{H}_{\perp} = \frac{\lambda^2}{4} g^{-1/2} \bar{\pi}_J \pi_k^k + g^{1/2} \eta^J - \partial_i J^{i\perp} - \frac{g^{1/2}}{\pi \lambda^2} \nabla_i \partial^i \eta^J \, , \qquad (2.14) $$

$$ \mathcal{H}_i = \partial_i \eta^J \bar{\pi}_J + \frac{\lambda^2}{4} g^{1/2} J_i^{\perp} \bar{\pi}_J - \partial_i \pi_k^k + g^{-1/2} \partial_i g^{1/2} \, \pi_k^k \, . \qquad (2.15) $$

II. MÉTODO DE FADDEEV-JACKIW

Vimos que para pasar al formalismo de segundo orden se debe imponer la nulidad de la ecuación de la torsión, lo cual permite escribir

$$ \omega_\mu(V) = -V_\mu^a \varepsilon^{\rho\sigma} \partial_\rho V_{a\sigma} \, . \qquad (3.1) $$

Es posible escribir la densidad Lagrangiana correspondiente a la acción (1.7) como sigue:

$$ \mathcal{L} = \frac{4}{\lambda^2} (-g^{1/2}) \, \varepsilon^{\mu\nu} \left[(\partial_\mu \eta^J) \omega_\nu - \frac{1}{8} \lambda^2 \eta^J \, \varepsilon_{ab} V_\mu^a V_\nu^b \right] \, . \qquad (3.2) $$

En el marco del formalismo de Faddeev-Jackiw (FJ)[6–9], se debe definir un conjunto de variables que permitan llevar la densidad Lagrangiana (3.2) a la forma simplética de FJ. Un conjunto adecuado de variables que define el correspondiente espacio de configuración es:

$$ L_{ai} \, , \; p^{ai} \, , \; \eta^J \, , \; \pi_J \, , \; L_{a0} $$

donde $p^{ai} = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{L}_{ai}$ y $\pi_J = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\eta}^J$.

Usando (3.1) la densidad Lagrangiana (3.2) toma la forma:

$$ \mathcal{L} = p^{ai} \dot{L}_{ai} + \pi_J \, \dot{\eta}^J - \widetilde{V} \, . \qquad (3.3) $$

El potencial simplético $\widetilde{V} = L_{a0} \mathcal{H}'^a$ donde:

$$ \begin{aligned} \mathcal{H}'^a = -n^a & \left[\frac{\lambda^2}{4} \, g^{-1/2} \, \pi^i{}_i \, \bar{\pi}_J + g^{1/2} \, \eta^J \right. \\ & \left. - \frac{4}{\lambda^2} \, g^{1/2} \, g^{jk} \, \nabla_j \partial_k \eta^J \right] \\ & + L^{ai} \left[(\partial_i \eta^J) \bar{\pi}_J - \partial_i \pi^k{}_k + g^{-1/2} \, \partial_i g^{1/2} \, \pi^k{}_k \right] \, . \end{aligned} \qquad (3.4) $$

Vemos así que la única variable singular es L_{a0}.

La matriz simplética resulta:

$$ f_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_a^b \delta_i^j & 0 & 0 & 0 \\ \delta_a^b \delta_i^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, . \qquad (3.5) $$

Por lo tanto la matriz simplética resulta singular y tiene un autovalor cero . Si llamamos $v_\alpha(x,t)$ a la función correspondiente al modo cero (donde α varía sobre el número de autovalores nulos de la matriz simplética), o sea:

$$ \int dx \, \bar{v}_\alpha(x,t) \frac{\delta}{\delta L_{a0}} \int dy \, \widetilde{V}(y,t) = 0 \, , \qquad (3.6) $$

se muestra que $\mathcal{H}'^a = 0$ y se obtiene así un vínculo.

Por lo tanto en la primera iteración el Lagrangiano se escribe:

$$ \mathcal{L}^{(1)} = p^{ai} \dot{L}_{ai} + \pi_J \, \dot{\eta}^J + \dot{\lambda}_a \mathcal{H}'^a - \widetilde{V}^{(1)} \, , \qquad (3.7) $$

donde

$$ \widetilde{V}^{(1)} = \widetilde{V} \, |_{\mathcal{H}'^a = 0} \, , \qquad (3.8) $$

finalizando así el proceso de iteración.

La matriz simplética que se obtiene después de la primera iteración es:

$$ f_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_a^b \delta_i^j & 0 & 0 & \frac{\partial \mathcal{H}'^a}{\partial L_{bi}} \\ \delta_a^b \delta_i^j & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \mathcal{H}'^a}{\partial p^{bi}} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{\partial \mathcal{H}'^a}{\partial \eta^J} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial \mathcal{H}'^a}{\partial \pi_J} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}'^b}{\partial L_{aj}} & -\frac{\partial \mathcal{H}'^b}{\partial p^{aj}} & -\frac{\partial \mathcal{H}'^b}{\partial \eta^J} & -\frac{\partial \mathcal{H}'^b}{\partial \pi_J} & 0 \end{pmatrix} $$

Se muestra que:

$$ \begin{aligned} \det f_{ij}^{(1)} &= \left(\frac{\partial \mathcal{H}'^a}{\partial Q_i} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}'^b}{\partial P^i} - \frac{\partial \mathcal{H}'^a}{\partial P^i} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}'^b}{\partial Q_i} \right)^2 \\ &= \left[\mathcal{H}'^a, \mathcal{H}'^b \right]_P^2 \, , \end{aligned} \qquad (3.9) $$

donde $Q_i = \left(L_{ai}, \eta^J\right)$ y $P^i = \left(p^{ai}, \pi_J\right)$.

Además se muestra que:

$$\left[\mathcal{H}'^a, \mathcal{H}'^b\right]_P = \Lambda_c^{ab}(Q_i, P^i)\mathcal{H}'^c \,.$$

Sin embargo este vínculo no cierra el álgebra de los vínculos de primera clase.

Para cerrar el álgebra de los vínculos generadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{H}_a(x), \mathcal{H}_b(y)] &= \frac{1}{2} R_{abcd} J^{cd}\, \delta(x-y) && \text{(3.10a)}\\
[\mathcal{H}_c(x), J_{ab}(y)] &= (\eta_{bc}\mathcal{H}_a - \eta_{ac}\mathcal{H}_b)\ \delta(x-y) && \text{(3.10b)}\\
[J_{ab}(x), J_{cd}(y)] &= (\eta_{ac}\ J_{bd} - \eta_{bc}\ J_{ad} + \eta_{bd}\ J_{ac} \\
&\quad - \eta_{ad}\ J_{bc})\, \delta(x-y) \,, && \text{(3.10c)}
\end{aligned}$$

es necesario introducir en el formalismo de FJ el generador J^{ab} de las rotaciones locales de Lorentz en forma ad hoc. Se puede mostrar que la siguiente combinación

$$J^{ab} = p^{ai} L_i^b - p^{bi} L_i^a + \frac{4}{\lambda^2} g^{1/2} \left(n^a L^{bi} - n^b L^{ai}\right) \partial_i \eta^J \,, \tag{3.11}$$

es nula; y que los conmutadores $[\mathcal{H}'_c(x), J_{ab}(y)]$ y $[J_{ab}(x), J_{cd}(y)]$ también son nulos pero no cierran un álgebra.

Consecuentemente, si en vez de partir del Lagrangiano (3.3) para construir el formalismo de FJ, partimos de otro equivalente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^* &= p^{ai} \dot{L}_{ai} + \pi_J\, \dot{\eta}^J - \Big(L_{a0}\mathcal{H}'^a + \lambda_{ab}\, J^{ab} + \omega_{0ab}\, J^{ab} \\
&\quad - \omega_{0ab}\, J^{ab}\Big) = p^{ai} \dot{L}_{ai} + \pi_J\, \dot{\eta}^J - V \,,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

donde ahora las variables singulares son L_{a0} y ω_{0ab}, el potencial simplético resulta:

$$V = L_{a0} \left(\mathcal{H}'^a + \frac{\lambda^2}{4} g^{-1/2} L_i^a\, J^{i\perp}\, \bar{\pi}_J + n^a\, \partial_i J^{i\perp}\right) \,. \tag{3.13}$$

Después de completar las iteraciones correspondientes, la nueva matriz simplética singular tendrá la forma:

$$f_{ij}^* = \begin{pmatrix}
0 & -\delta_a^b \delta_i^j & 0 & 0 & \frac{\partial \mathcal{H}^a}{\partial L_{bi}} & \frac{\partial J^{ac}}{\partial L_{bi}} \\
\delta_a^b \delta_i^j & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \mathcal{H}^a}{\partial p^{bi}} & \frac{\partial J^{ac}}{\partial p^{bi}} \\
0 & 0 & 0 & -1 & \frac{\partial \mathcal{H}^a}{\partial \eta^J} & \frac{\partial J^{ac}}{\partial \eta^J} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial \mathcal{H}^a}{\partial \pi_J} & \frac{\partial J^{ac}}{\partial \pi_J} \\
-\frac{\partial \mathcal{H}^b}{\partial L_{aj}} & -\frac{\partial \mathcal{H}^b}{\partial p^{aj}} & -\frac{\partial \mathcal{H}^b}{\partial \eta^J} & -\frac{\partial \mathcal{H}^b}{\partial \pi_J} & 0 & 0 \\
-\frac{\partial J^{bd}}{\partial L_{aj}} & -\frac{\partial J^{bd}}{\partial p^{bi}} & -\frac{\partial J^{bd}}{\partial \eta^J} & -\frac{\partial J^{bd}}{\partial \pi_J} & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene dos modos cero, asociados a los nuevos vínculos de primera clase $\mathcal{H}_a$ y J_{ab}. Los autovectores correspondientes a autovalores nulos satisfacen:

$$\begin{aligned}
(v^a)^T . f &= \left(0, .., 0\, , \left[\mathcal{H}^a, \mathcal{H}^b\right]\ , \left[\mathcal{H}^a, J^{bc}\right]\right) && \text{(3.14a)}\\
\left(v^{ab}\right)^T . f &= \left(0, .., 0\, , \left[J^{ab}, \mathcal{H}^c\right]\ , \left[J^{ab}, J^{cd}\right]\right) \,. && \text{(3.14b)}
\end{aligned}$$

Como ahora estos corchetes de Poisson cierran el álgebra (3.10) de los vínculos, definen un conjunto de autovectores nulos sobre la superficie de los vínculos.

Finalmente se puede mostrar que la variación sobre los campos de medida viene dada por:

$$\delta \mu_\nu^A = \mathcal{D}_\nu^{AB}\ \varepsilon_B \,, \tag{3.15}$$

con $A, B = [a, (ab)]$ y $\mu = [0, 1]$. Como es usual, esto significa que la correspondiente acción es invariante bajo el espacio-tiempo total dependiente de esta simetría de medida y no solamente a la simetría restringida a la superficie de los vínculos .

En conlusión, el formalismo de FJ, como en general ocurre con los métodos en componentes aplicados a teorías Lagrangianas gravitatorias, no dan cuenta naturalmente del conjunto completo de vínculos de primera clase que cierran el álgebra correspondiente. En cambio el formalismo geométrico canónico exterior, donde la invariancia de Lorentz es manifiesta debido al lenguaje en formas que se utiliza, naturalmente contiene la información de todos los vínculos asociados a las simetrías de gauge del modelo en cuestión.

---

[1] C. Teitelboim, Phys. Lett. B126 (1983) 41; in Quantum Theory of Gravity, ed. Christensen (Adam Hilger, Bristol, 1984); R. Jackiw, in Quantum Theory of Gravity, ed. Christensen (Adam Hilger, Bristol, 1984); Nuclear Phys. B252 (1985) 343.

[2] R.B. Mann y T.G. Steele, Classical and Quantum Gravity, 9 (1992) 475; M. Bañados, C. Teitelboim y J. Zanelli, Phys. Rev. Lett., 69 (1992) 1849; M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim y J. Zanelli, Phys. Rev. D, 48 (1993) 1506.

[3] D. Cangemi y M. Leblanc, Nucl. Phys. B420 (1994) 363.

[4] A. D'Adda, J. Nelson y T. Regge, Ann. Phys. 165 (1985) 384; J. Nelson y T. Regge, Ann. Phys 166 (1986) 234; A. Foussats y O.S. Zandron, Classical and Quantum Gravity, 5 (1988) 1231; A. Foussats y O.S. Zandron, Int. J. Mod. Phys. A5 (1990) 725.

[5] A. Foussats y O.S. Zandron, Phys. Rev. D 43 (1991) 1883.

[6] L. Faddeev y R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1692.

[7] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, International Journal of Modern Physics A 7 (1992) 4981.

[8] H. Montani and C. Wotzasek, Modern Physics LettersA 35 (1993) 3387.

[9] A. Foussats, E. Manavella, C.E. Repetto, O.P. Zandron y O.S. Zandron, "Gravedad conforme en dimensión (2+1). Su cuantificación utilizando el método de Faddeev-Jackiw". En este Volumen.