

GRAVEDAD CONFORME EN DIMENSIÓN (2+1). SU CUANTIFICACIÓN UTILIZANDO EL MÉTODO DE FADDEEV-JACKIW

A. Foussats, E. Manavella, C.E. Repetto, O.P. Zandron y O.S. Zandron
*Instituto de Física Rosario, Universidad Nacional de Rosario,
 Bvd. 27 de Febrero 210 bis, 2000 Rosario, Argentina*

La teoría de medida que describe la gravedad conforme en dimensión $D=3$ está descrita por un término de Lorentz-Chern-Simons puro. La densidad Lagrangiana del formalismo de segundo orden de esta teoría no Abelian es singular y contiene altas derivadas temporales. En este trabajo se aplica el método simpléctico de cuantificación de Faddeev-Jackiw y se estudian los vínculos de primera clase en un formalismo de primer orden.

The conformal gravity in three space-time dimensions is described by a pure Lorentz-Chern-Simons term. This system has constraints on curvatures and so, it is an higher-derivative gauge model. The dynamical properties of this model are analyzed by means of the Faddeev-Jackiw symplectic quantization method. Using this algorithm in the first order formalism, we study the gauge transformations and we find the constraints of the model.

00.04.65 +e

INTRODUCCIÓN

El método de Dirac para sistemas vinculados¹ ha sido utilizado en una gran número de sistemas en mecánica cuántica y en teoría de campo. Sin embargo el cálculo de las estructuras básicas, es decir, de los corchetes de Dirac generalmente es largo y tedioso.

Faddeev y Jackiw (FJ) en 1988² proponen una nueva forma para el tratamiento de sistemas vinculados, que en muchos casos resulta más "económica" que la formulación de Dirac.

El formalismo Lagrangiano de Faddeev-Jackiw, se basa en considerar Lagrangianos de primer orden en derivadas temporales. Esto no es un problema, ya que cualquier sistema puede ser llevado a una formulación de primer orden introduciendo campos auxiliares y por lo tanto aumentando el número de variables del espacio de configuración. Los corchetes generalizados se obtienen a partir de las ecuaciones de movimiento y se demuestra que coinciden con los que se obtienen directamente del formalismo de Dirac^{3,4}.

En esta formulación la clasificación de sistemas vinculados y no vinculados está relacionada con el comportamiento singular de la 2-forma simpléctica.

El formalismo de Faddeev-Jackiw ha sido estudiado en profundidad en los trabajos de referencias⁵⁻⁸. En dichos trabajos, se muestra que realmente este método resulta más simple y económico que el de Dirac. Esto en parte se debe a que en el formalismo de FJ en general hay un número menor de vínculos. Aún en el caso en que el número de vínculos sea el mismo, ellos se obtienen realizando un número menor de pasos.

En este trabajo se utiliza el formalismo de FJ para describir la gravedad conforme en dimensión (2+1). En la sección II se hace un resumen del formalismo de FJ. En la sección III se lo aplica al formalismo de primer orden⁹.

I. FORMALISMO DE FADDEEV-JACKIW PARA SISTEMAS VINCULADOS

En este método el punto de partida es un formalismo Lagrangiano. Sea un sistema con N grados de libertad descrito por un Lagrangiano de la forma

$$L = a_k(q)\dot{q}^k - V(q) \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

donde las variables dinámicas $q^k(t)$ definen un espacio de configuración construido con el conjunto de variables originales, más el conjunto de los campos auxiliares. El número de campos auxiliares que se deben introducir, son los necesarios para llevar el Lagrangiano original a uno de primer orden en derivadas temporales.

A partir del Lagrangiano (2.1), se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$f_{ij}(q)\dot{q}^j - \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0, \quad (2.2)$$

donde las cantidades

$$f_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial q^i} - \frac{\partial a_i}{\partial q^j}, \quad (2.3)$$

son los elementos de la matriz simpléctica. El estudio de esta matriz dirá si la teoría presenta o no vínculos.

Si la matriz simpléctica es no singular, a partir de las ecuaciones de movimiento (2.2), resulta

$$\dot{q}^j = (f^{ij})^{-1} \frac{\partial V}{\partial q^i}. \quad (2.4)$$

El Hamiltoniano correspondiente al Lagrangiano (2.1) coincide con el potencial simpléctico $V(q^i)$, por lo tanto a partir de la ecuación (2.4) se obtiene

$$\dot{q}^j = [V, q^j] = \frac{\partial V}{\partial q^i} [q^i, q^j], \quad (2.5)$$

donde $[q^i, q^j] = (f^{ij})^{-1}$ son los corchetes generalizados correspondientes al formalismo de FJ. La transición a la mecánica cuántica se realiza, como es usual, reemplazando las variables clásicas por operadores cuánticos actuando sobre algún espacio de Hilbert.

Si en cambio la matriz simpléctica f_{ij} es singular, ella tendrá m ($m < N$) autovectores v_a correspondientes a autovalores nulos (con $a = 1, 2, \dots, m$). En esta formulación los vínculos aparecen como condiciones algebraicas necesarias para mantener la consistencia de las ecuaciones de movimiento.

Multiplicando la ecuación (2.2) por izquierda por los autovectores correspondientes a autovalores nulos, los vínculos Ω_a resultan:

$$\Omega_a = (v_a^i)^T \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0 \quad a = 1, \dots, m. \quad (2.6)$$

Los vínculos Ω_a se introducen en el Lagrangiano utilizando adecuados multiplicadores de Lagrange. Estos multiplicadores pasan a formar parte de las variables dinámicas de la teoría, y por lo tanto el espacio de configuración se amplía. Con el Lagrangiano así obtenido se repite el procedimiento.

Pueden ocurrir dos cosas:

1) Que después de N pasos iterativos, la matriz $f_{ij}^{(N)}$ sea invertible. En este caso se obtienen los corchetes generalizados a partir de los elementos de la matriz inversa $(f^{ij(N)})^{-1}$, los cuales coinciden con los corchetes de Dirac^{3,4}.

2) Que después de N pasos iterativos, la matriz $f_{ij}^{(N)}$ continúe siendo singular y al repetir una vez más el procedimiento no se obtengan nuevos vínculos. Este es el caso en que se está tratando con teorías de gauge. Por lo tanto, para lograr que la matriz simpléctica sea invertible es necesario introducir los términos de fijado de gauge.

Hasta aquí se ha considerado el caso de teorías con un número finito de grados de libertad. La adaptación a la teoría de campo, básicamente se realiza reemplazando las derivadas parciales por derivadas funcionales. De esta forma los elementos de la matriz simpléctica están dados por la ecuación

$$f_{AB}(x, y) = \frac{\delta a_B(y)}{\delta \phi^A(x)} - \frac{\delta a_A(x)}{\delta \phi^B(y)}, \quad (2.7)$$

donde $\phi^A(x)$ representa cualquiera de los campos del conjunto simpléctico. Por otro lado, en las condiciones de vínculo (2.6), se debe integrar sobre las variables del potencial ya que se trabaja con densidades, y sumar sobre las variables de los autovectores. Teniendo en cuenta esto, la ecuación (2.6) resulta:

$$\int dx v_A(x, t) \Omega^A = \int dx v_A(x, t) \frac{\delta}{\delta \phi^A(x, t)} \times \int dy \mathcal{V}(y, t) = 0, \quad (2.8)$$

donde $v_A(x, t)$ son los autovectores correspondientes a autovalores nulos de la matriz simpléctica. Las cantidades Ω^A son los vínculos en este formalismo.

II. FORMALISMO DE PRIMER ORDEN

El Lagrangiano para la gravedad conforme en dimensión $(2+1)^{9,10}$ se escribe:

$$\mathcal{L} = (-g)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\sigma\nu\rho} \left[\gamma_{AB} R_{\sigma\nu}^B \mu_\rho^A + \frac{1}{6} C_{ABC} \mu_\sigma^C \mu_\nu^B \mu_\rho^A \right], \quad (3.1)$$

con $\sigma, \nu, \rho = 0, 1, 2$.

Los campos de gauge para los distintos valores del índice A son:

$$\mu_\rho^A = (\omega_\rho^{ab}, V_\rho^a, f_\rho^a, b),$$

donde ω_ρ^{ab} es la conexión espinorial, V_ρ^a el "dreibein", f_ρ^a el "boost" conforme y b el dilatón.

Las cantidades C_{ABC} , totalmente antisimétricas, son las constantes de estructura del grupo conforme y están relacionadas con la métrica de Killing γ_{AB} por la ecuación

$$C_{ABC} = \gamma_{AD} C_{BC}^D.$$

Las expresiones explícitas para las curvaturas son:

$$R_{\mu\nu}^{ab}(\omega) = \mathcal{R}_{\mu\nu}^{ab}(\omega) - (V_\mu^a f_\nu^b - V_\nu^a f_\mu^b - V_\mu^b f_\nu^a + V_\nu^b f_\mu^a),$$

$$R_{\mu\nu}^a(V) = \frac{1}{2} [\partial_\mu V_\nu^a - \partial_\nu V_\mu^a + \omega_\mu^{ab} V_{b\nu} - \omega_\nu^{ab} V_{b\mu} - b_\mu V_\nu^a + b_\nu V_\mu^a], \quad (3.2)$$

$$R_{\mu\nu}^a(f) = \frac{1}{2} [\partial_\mu f_\nu^a - \partial_\nu f_\mu^a + \omega_\mu^{ab} f_{b\nu} - \omega_\nu^{ab} f_{b\mu} + b_\mu f_\nu^a - b_\nu f_\mu^a],$$

$$R_{\mu\nu}(b) = \frac{1}{2} [\partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu + 2V_\mu^a f_{a\nu} - 2V_\nu^a f_{a\mu}].$$

donde $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{ab}(\omega)$ es la curvatura construida con la conexión espinorial conforme.

La densidad Lagrangiana (3.1) se puede llevar a la forma de la ecuación (2.1), y resulta

$$\mathcal{L} = a_{\mu_i^A} \dot{\mu}_i^A - \mathcal{V}(\mu_\nu^A) = (g^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{ij} \gamma_{AB} \mu_j^A) \dot{\mu}_i^B - [-2g^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{ij} \gamma_{AB} \mu_0^A R_{ij}^B]. \quad (3.3)$$

El conjunto inicial de variables simplécticas es $\chi_i = (\mu_i^A, \mu_0^A)$. Los coeficientes de la matriz simpléctica se obtienen fácilmente a partir de la ecuación (2.7) y quedan dados por:

$$f_{\mu_i^A(x), \mu_j^B(y)} = -2g^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{ij} \gamma_{AB} \delta(x-y), \quad (3.4a)$$

$$f_{\mu_0^A(x), \mu_i^B(y)} = f_{\mu_0^A(x), \mu_0^B(y)} = 0. \quad (3.4b)$$

Evidentemente, la matriz $f_{\mu_i^A, \mu_j^B}$ es singular. Esto quiere decir que existe un conjunto de autovectores v_0^A

correspondientes a autovalores nulos. A partir de la condición (2.8) se obtienen los siguientes vínculos

$$\Omega_A = -2g^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{ij}\gamma_{AB}R_{ij}^B. \quad (3.5)$$

Debemos ahora repetir el proceso. Para eso introducimos los vínculos Ω_A con sus correspondientes multiplicadores de Lagrange λ^A , en la parte canónica de la densidad Lagrangiana. El nuevo Lagrangiano se escribe:

$$\mathcal{L}' = \left(g^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{ij}\gamma_{AB}\mu_j^A\right)\dot{\mu}_i^B + \Omega_A\lambda^A - \mathcal{V}', \quad (3.6)$$

donde $\mathcal{V}' = \mathcal{V}|_{\Omega_A=0} = 0$.

El nuevo conjunto de variables es $\chi_k^i = (\mu_k^A, \lambda^A)$. Los elementos de la nueva matriz simpléctica resultan:

$$f'_{\mu_i^A(x), \mu_j^B(y)} = f_{\mu_i^A(x), \mu_j^B(y)} = -2g^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{ij}\gamma_{AB}\delta(x-y),$$

$$f'_{\mu_i^A(x), \lambda^B(y)} = -f'_{\lambda^B(y), \mu_i^A(x)} = \frac{\delta\Omega_B(y)}{\delta\mu_i^A(x)}, \quad (3.7)$$

$$f'_{\lambda^A(x), \lambda^B(y)} = 0.$$

A partir de las ecuaciones (3.7) se observa que la matriz f'_{AB} es nuevamente singular. Dado que $\mathcal{V}' = 0$, repitiendo el procedimiento no se obtienen nuevos vínculos. Es decir, no es posible eliminar los vínculos Ω_A los cuales son de primera clase. Es posible mostrar que estos vínculos son los generadores de las simetrías de gauge del modelo. Realizando transformaciones de gauge sobre las variables de campo se obtiene

$$\delta\mu_i^A = (\nabla_i \varepsilon)^A, \quad (3.8)$$

donde ε son los parámetros infinitesimales de las correspondientes transformaciones.

Identificando $\dot{\lambda}_A = -\mu_0^A$ y realizando la transformación de gauge sobre el multiplicador μ_0^A , se obtiene $\delta\mu_0^A = (\nabla_0 \varepsilon)^A$.

Por lo tanto, la transformación infinitesimal (3.8) definida sobre la superficie de los vínculos, se extiende a todo el espacio de configuración y es posible escribir:

$$\delta\mu_\nu^A = (\nabla_\nu \varepsilon)^A. \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9) muestra la forma usual de las transformaciones de gauge sobre los campos.

A partir de aquí, en razón de obtener una matriz simpléctica no singular, es necesario agregar los términos de fijado de gauge al Lagrangiano.

Posteriormente, el proceso de cuantificación se puede llevar a cabo utilizando los métodos conocidos.

Si se trabaja en el formalismo de segundo orden, es necesario imponer la nulidad de la ecuación de la torsión (3.2), la que nos permite escribir

$$\omega_\mu^{ab}(V, b) = \omega_\mu^{ab}(V) - b^\nu (V_\mu^a V_\nu^b - V_\mu^b V_\nu^a). \quad (3.10)$$

Introduciendo las restantes ecuaciones (3.2) para las curvaturas y la ecuación (3.10) en el Lagrangiano (3.1), este se puede escribir:

$$\mathcal{L} = N^\perp g^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\alpha\mu\rho} \left[\partial_\alpha \omega_\mu^{ab} \omega_\rho^{ab} - \frac{2}{3} \omega_\alpha^{ab} \omega_\mu^{bc} \omega_\rho^{ca} \right], \quad (3.11)$$

donde la conexión espinorial que aparece en (3.11) $\omega_\mu^{ab} = \omega_\mu^{ab}(V)$ es la conexión de la gravedad simple (gravedad de Poincaré). Los campos del dilatón y del "boost" conforme quedan así completamente eliminados. Por lo tanto, en el formalismo de segundo orden la densidad Lagrangiana depende sólo del campo V_μ^a .

La densidad Lagrangiana (3.11) contiene derivadas segundas temporales sobre el campo V_μ^a , las cuales no pueden ser eliminadas por medio de una integración parcial debido a la presencia del término de Lorentz-Chern-Simons. Se está así en presencia de una teoría en altas derivadas.

Consecuentemente, en el marco del formalismo de FJ, se debe definir un conjunto de variables auxiliares que permitan llevar la densidad Lagrangiana (3.11) a la forma (2.1). Para ello se define un campo independiente $B_i^a = \dot{V}_i^a$ ($i = 1, 2$) y la expresión (3.11) toma la forma:

$$\mathcal{L} = \pi^{ck} \dot{B}_{ck} + \pi^{c0} \dot{V}_{c0} - \mathcal{V}(B_{ai}, \pi^{ck}, V_{c0}, \pi^{c0}, V_{ai}),$$

A partir de este punto la aplicación del método de FJ es directa, con la complicación adicional en el cálculo inherente al formalismo de segundo orden.

Concluyendo, es evidente que el método de FJ aplicado al formalismo de primer orden permite llegar a los resultados en forma más simple que utilizando el método de Dirac.

Por otro lado es sabido que el formalismo de segundo orden en este modelo utilizando el método de Dirac es extremadamente complicado. La respuesta que aun no es posible dar es si en el formalismo de segundo orden el método de FJ es realmente más "económico".

¹ Dirac P.A.M., Can. J. Math. 2, 129 (1950); "Lectures on Quantum Mechanics" (NY: Yeshiva University Press, 1964), Sundermeyer K., "Constrained Dynamics" Springer-Verlag (1982).

² L. Faddeev and R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. 60, 1692 (1988).

³ J. Govaerts, Int. J. of Modern Physics A 5, 3625 (1990).

⁴ M. V. E. Costa and H. O. Girotti, Phys. Rev. Lett. 60, 1771 (1988).

⁵ R. Floreanini and R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. 59, 1873 (1987).

⁶ J. Barcelos-Neto and P. P. Srivastava, Phys. Lett. B259, 456 (1991).

⁷ J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, Mod. Phys. Lett. A7, 1172 (1992), Int. J. of Mod. Phys. A 7, 4981 (1992).

⁸ H. Montani and C. Wotzasek, Modern Phys. Lett. A 35, 3387 (1993).

⁹ P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. D 32, 872 (1985).

¹⁰ Foussats A., Repetto C., Zandron O.P. and Zandron O.S., Class. Quant. Grav. 9, 2217 (1992).