ERRORES SISTEMÁTICOS, ERRORES ESTADÍSTICOS: UNA EXPERIENCIA DEMOSTRATIVA

J. M. Simon, M. C. Simon y C. E. Vanney
Laboratorio de Óptica, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Nuñez, (1428) Buenos Aires, Argentina.

En toda medición aparecen fundamentalmente dos tipos de errores: los sistemáticos y los estadísticos. Los errores estadísticos se manifiestan en la fluctuación del resultado al repetir la medición y pueden disminuirse promediando un mayor número de mediciones. Los errores sistemáticos presentan dificultades mucho mayores. Por una parte son difíciles de detectar y por lo tanto de corregir. Uno de los métodos más interesantes y ampliamente usado es transformar errores sistemáticos en estadísticos y poder así disminuirlos aumentando el número de mediciones. Presentamos aquí una experiencia sencilla a nivel de alumnos que ilustra este método y muestra el poder de la estadística.

In each measurement there appear fundamentally two kinds of errors: the systematic and the statistical ones. We recognize the statistical errors in the fluctuation of the results obtained when we repeat the measurements. We can decrease them obtaining an average from a great number of measurements. The systematic errors cause greater troubles. They are difficult to detect and hence to correct. An interesting and widely used method is to convert the systematic errors in statistical ones and diminish them doing a great number of measurements. We present here a simple experience, apt for undergraduate students, which illustrates this method and shows the power of statistics.

I. EXPERIMENTO

Con el fin de medir el ancho de un rectángulo de cartulina, utilizamos como instrumento una regla con agujeros a intervalos regulares. Al hacer coincidir un extremo de dicha regla con el objeto a medir se introduce un error sistemático de truncación: sólo puede afirmarse que la longitud del objeto se encuentra comprendida entre el último agujero cubierto y el primer agujero que aparece libre (ver Fig. 1). En cambio, arrojando la regla al azar, se obtienen mediciones fluctuantes cuyo promedio da la longitud a medir con mayor precisión (ver Fig. 2).

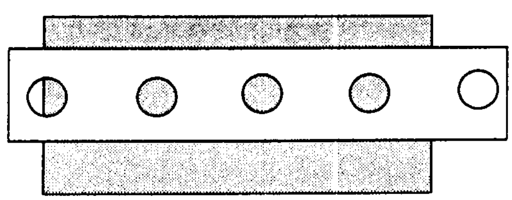

Fig. 1: Medición haciendo coincidir un extremo de la regla con el objeto a medir. Puede afirmarse únicamente que la longitud del objeto se encuentra entre el último agujero cubierto y el primer agujero que aparece libre.

II. APLICACIÓN DE LA ESTADÍSTICA

Definimos la variable aleatoria x como el número de agujeros tapados cuando arrojamos la regla sobre el objeto a medir.

Si analizamos la experiencia propuesta vemos que tiene las siguientes características:

• Arrojamos la regla un número fijo de veces n.
• El experimento puede dar dos resultados posibles ya que el número de agujeros tapados será: ó el valor del último que aparecía cubierto -cuando hacíamos coincidir un extremo de la regla con el ob-

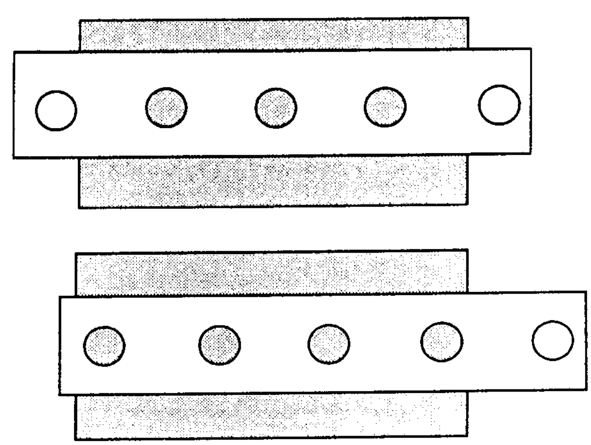

Fig. 2: Mediciones arrojando al azar la regla sobre el objeto.

jeto a medir- ó el primero de los agujeros que aparecían descubiertos. Entre estos dos se encuentra el valor real de la longitud del objeto y, al arrojar la regla al azar sobre él, la fluctuación que se introduce en la coincidencia con el origen de la regla, está acotada por la distancia entre dos agujeros consecutivos.

• Los dos resultados posibles son independientes entre sí. El haber obtenido un resultado al arrojar la regla una vez, no condiciona el resultado a obtener al arrojarla la próxima vez.

• La probabilidad p de obtener uno de los dos resultados permanece constante a lo largo de toda la experiencia. Depende únicamente del valor de la longitud de la cartulina y de su mayor proximidad a uno de los dos agujeros entre los cuales se encuentra comprendida cuando hacemos coincidir el origen de la regla con el del objeto a medir. Si llamamos p a la probabilidad que le corresponde a uno de los dos resultados posibles, (1-p) será la probabilidad de obtener el otro resultado.

Las cuatro características mencionadas nos permiten afirmar que la variable aleatoria x sigue una distribución binomial: $x \sim Bi(n, p)$. Por lo tanto, la probabilidad de que el promedio obtenido- al arrojar la regla n veces sobre el objeto a medir- sea x es:

$$P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} .$$

Pensando en la regla de agujeros, x estará comprendido entre el último agujero cubierto y el primer agujero destapado.

En las figs. 3-8 se representa en el eje x la distancia entre estos dos agujeros y P (x) en el eje

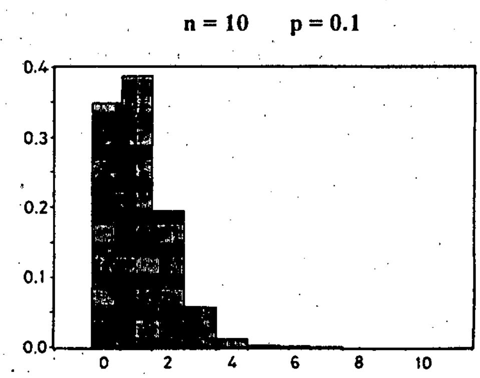

Fig. 3: Distribución binomial correspondiente a n = 10 y p = 0,1. Se grafica la probabilidad de que el promedio obtenido al hacer series de 10 mediciones sea x. En el eje x se representan las fracciones de la distancia entre los dos agujeros entre los cuales se encuentra la longitud del objeto.

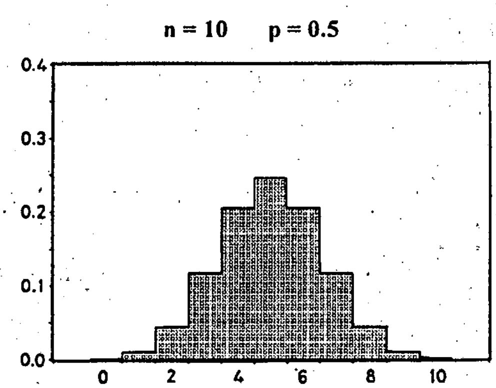

Fig. 4: Distribución binomial correpondiente a n = 10 y p = 0,5.

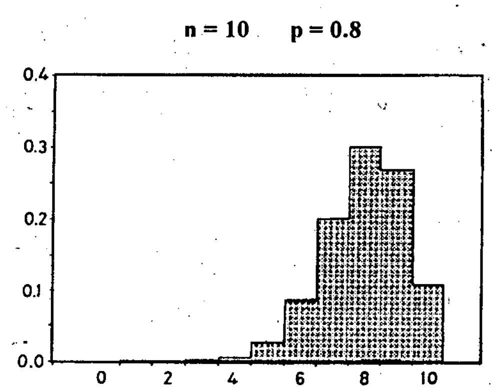

Fig. 5: Distribución binomial correspondiente a n = 10 y p = 0,8.

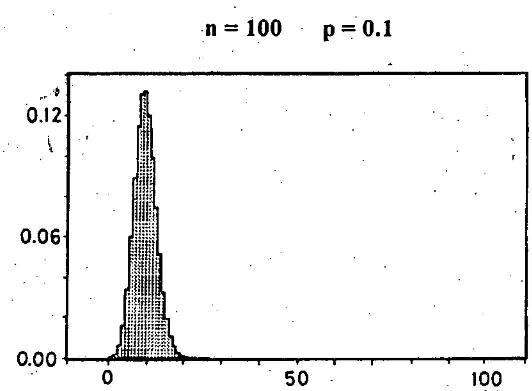

Fig. 6: Distribución binomial correpondiente a n = 100 y p = 0,1.

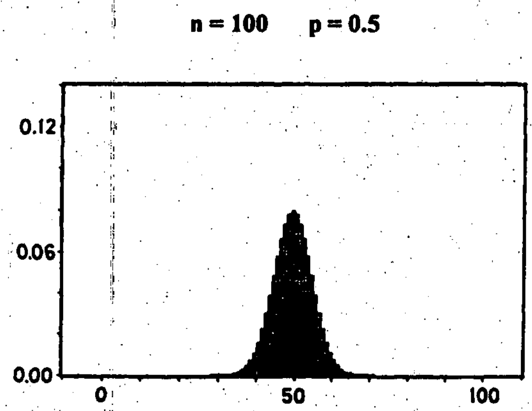

Fig. 7: Distribución binomial correspondiente a n = 100 y p = 0,5.

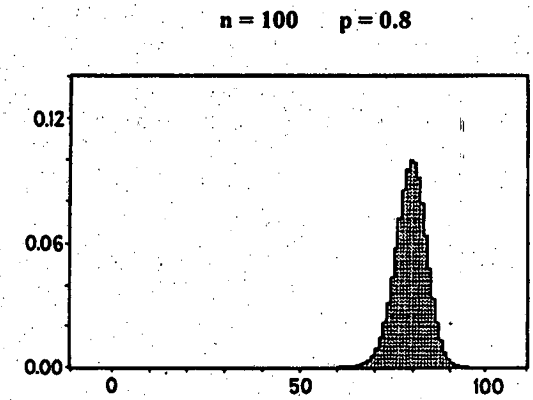

Fig. 8: Distribución binomial correspondiente a n = 100 y p = 0,8.

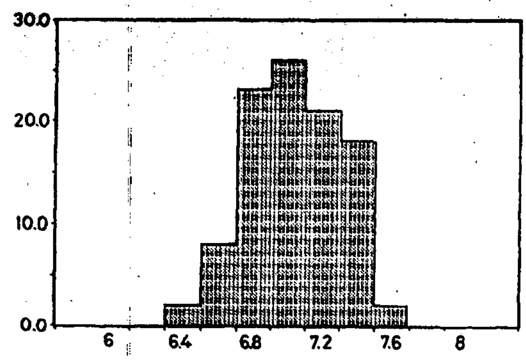

Fig. 9: Histograma experimental obtenido calculando los promedios de 100 series de 10 tiradas cada una. La longitud de la cartulina a medir era de 7 cm. En el eje x se representan los promedios de las longitudes medidas. Sus valores caen entre el tercer agujero (6 cm) y el cuarto (8 cm).

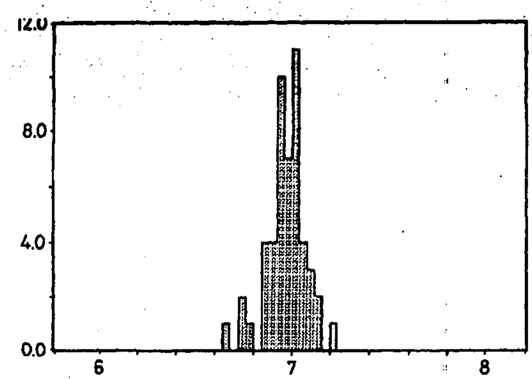

Fig. 10: Histograma experimental obtenido calculando los promedios de 50 series de 100 tiradas cada una. La longitud de la cartulina a medir era de 7 cm. En el eje x se representan los promedios de las longitudes medidas. Sus valores caen entre el tercer agujero (6 cm) y el cuarto (8 cm).

y. Las tres primeras figuras corresponden a n = 10, graficándose la probabilidad de que el promedio de 10 mediciones se encuentre entre x y x + dx, siendo dx una décima de la división entre dos agujeros consecutivos de la regla. Las tres figuras siguientes corresponden a n = 100 y dx una centésima de la distancia entre agujeros. Los dos histogramas restantes son resultados experimentales y corresponden a p = 0.5. En la Fig. 9 se representa la frecuencia de los promedios obtenidos en 100 series de 10 tiradas. En la Fig. 10 se representan las frecuencias de los valores medios de 50 series de 100 tiradas cada una.

III. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Analizando los histogramas se observa que la dispersión de los datos disminuye considerablemente al aumentar el número de mediciones. Esta experiencia es un ejemplo claro de cómo mediante la estadística se puede lograr una presición grande en los resultados a pesar de las limitaciones, también muy grandes, del instrumento que se utilizó para medir.

Cabe destacar la importancia que tiene en la investigación experimental el ingenio para tranformar los errores sistemáticos en estadísticos y así disminuirlos en base al número de mediciones.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Señorita Marta Pedernera la confección de los dibujos.

REFERENCIAS

1. Cramer, Harald: *Elementos de la Teoría de Probabilidades y algunas de sus aplicaciones*. Editorial Aguilar, Madrid, 1958.