SOBRE LA EQUIVALENCIA ENTRE LAS DISTINTAS FORMULACIONES DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

E. T. García Alvarez*

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Pabellón I, Ciudad Universitaria, (1428) Buenos Aires.

En un trabajo previo se expuso -en líneas generales- el formalismo de Wigner de la Mecánica Cuántica en el espacio de las fases y se mostró su equivalencia con la formulación canónica de Heisenberg, Schroedinger y Dirac. Aquí mostramos que el formalismo de integral de camino de Feyman puede derivarse naturalmente partiendo del cuadro de Wigner, completando así una exposición didáctica de la equivalencia entre las principales formulaciones de la Mecánica Cuántica.

I. INTRODUCCIÓN

Poco tiempo después del surgimiento de la Mecánica Matricial de Heisenberg, Born y Jordan[1] (1925) y la Mecánica Ondulatoria de De Broglie y Schroedinger[2](1926), fue el propio Schroedinger quien descubrió la equivalencia entre ambos formalismos[3]. Posteriormente, Dirac[4] extrajo la esencia de ambos es su Teoría de las Representaciones. Por la misma época Von Neuman[5] formalizó el trabajo de Dirac e introdujo, al mismo tiempo que Landau, el concepto de matriz de densidad.

El desarrollo de esas ideas está en general descripto en los tratados clásicos de Mecánica Cuántica[6], por lo que no nos detendremos a hacer un análisis del cuadro de implicaciones entre las distintas representaciones del formalismo de la Mecánica Cuántica arriba mencionadas.

Sin embargo, como señalamos en un trabajo anterior (I)[7], la formulación de la Mecánica Cuántica en el espacio de las fases, ya sea en la versión original de Wigner[8] (1932) o en alguna de las otras formas surgidas posteriormente en la literatura[9], es muy poco discutida en los textos clásicos de Mecáncia Cuántica. Tal vez ello se deba a que en la formulación original de Wigner, su equivalencia con la formulación standard quedaba restringida al caso particular de operadores cuánticos de la forma $f(Q)+g(P)$, para los cuales no existe problema de ordenamiento. Fue Moyal[10] (1949) el primero en demostrar que el formalismo de Wigner coincidía con el formalismo *standard*, si los operadores involucrados correspondían a expresiones clásicas cuantificadas por medio de la regla de ordenamiento de Weyl[11]. Pero esto todavía no ofrecía un cuadro general para el caso de operadores arbitrarios. No fue sino hasta los trabajos de Rosenbaum[12] (1967) y Leaf[13] (1968), en que se demostrara la perfecta equivalencia de ambas formulaciones, y que la debida a Wigner no es otra cosa que un isomorfismo entre los operadores del formalismo, la Mecánica Cuántica y las funciones definidas sobre el espacio de las fases, por medio de la aplicación inversa de la regla de Weyl.

En I presentamos el formalismo de Wigner haciendo hincapié en este punto, así como en su equivalencia con el formalismo de matriz densidad; sus principales aspectos son resumidos en la sección II de este trabajo.

La restante formulación de la Mecánica Cuántica universalmente aceptada, es el formalismo de integral de camino, que tiene origen en la tesis doctora de Feynman (1942) [14] y cuyos antecedentes pueden rastrearse en trabajos anteriores de Dirac[15]. La presentación original de Feynman, estaba formulada en función de una integral de camino en el espacio de configuraciones del sistema, y la intención original del trabajo era formular una Mecánica Cuántica basada directamente en el formalismo Lagrangiano, sin necesidad de recurrir al formalismo canónico de Hamilton. Fue también el propio Feynman quién estableciera por primera vez la conexión con el formalismo *standard*, derivando la ecuación de Schroedinger a partir de su propio formalismo, pero sólo para algunos casos particulares, como los correspondientes a Lagrangianos del tipo:

$$L = \tfrac{1}{2} m q^2 + v(q),$$

lo cual no prueba -en general- la equivalencia con el

* Becario de la Universidad de Buenos Aires

formalismo canónico *standard* de la Mecánica Cuántica[16].

Hoy día sabemos que en el caso de formas funcionales más complicadas, se deben sumar términos efectivos a la acción clásica del formalismo Lagrangiano[17]. Es por eso que la formulación Hamiltoniana de la integral de camino en el espacio de las fases[18], es preferida por algunos autores como punto de partida para el desarrollo del Formalismo de la Mecánica Cuántica.

Sin embargo, eso no resuelve todas las dificultades ya que es sabido que el problema del ordenamiento de operadores, se traslada al formalismo de Feynman, en la ambiguedad que existe para la elección del procedimiento de esqueletización utilizado para calcular la integral de camino[19]. En muy pocos textos de Mecánica Cuántica encontramos una derivación del formalismo de Feynman a partir de la formulación canónica, que haga hincapié en las dificultades arriba mencionadas[20].

La intensión de este trabajo es reforzar la comprensión de los mismos, así como mostrar que la formulación de integral de camino de Feynman en el espacio de las fases, se relaciona naturalmente con la formulación de Wigner presentada en I, completando así una exposición didáctica de la equivalencia entre las principales formulaciones de la Mecánica Cuántica discutidas en la literatura.

II. LA FORMULACIÓN DE WIGNER

En I dimos una exposición más detallada del formalismo de Wigner, aquí resumimos brevemente los principales aspectos que atañen a este trabajo. Como señalamos en la introducción, dicho formalismo no es otra cosa que el resultado de trasladar al espacio de las fases el formalismo canónico, mediante la aplicación inversa de la regla ordenamiento de Weyl. La regla de Weyl W y su inversa W^{-1}, son dos aplicaciones lineales que mapean funciones del espacio de las fases en operadores y viceversa, de acuerdo con la siguiente prescripción[21]:

$$W[\exp i(\theta\, q+\tau\, p)]=\exp i(\theta\, Q+\tau\, P), \qquad (1a)$$

$$W^{-1}[\exp i(\theta\, Q+\tau\, P)]=\exp i(\theta\, q+\tau\, p), \qquad (1b)$$

para todo valor de los parámetros reales θ y τ[22].

La aplicación inversa de un operador cualquiera al espacio de las fases, se suele denominar el equivalente de Wigner de dicho operador:

$$a_w(q,p)=W^{-1}(A) \qquad (2)$$

Puede demostrarse que $a_w(q,p)$ adopta la expesión:

$$a_w(q,p)=\hbar\int <q+\tfrac{1}{2}\mu\hbar\,|A|q-\tfrac{1}{2}\mu\hbar>\exp(-i\mu\, p)d\mu \qquad (3)$$

Si $A(Q,P)$ no presenta problemas de ordenamiento, es decir es una expresión del tipo $A(Q,\ P)=f(Q)+g(P)$, entonces es inmediato demostrar que $a_w(q,p)=f(q)+g(p)$ pero, en general, como sucede para el caso de un operador del tipo de $A(Q,P)=Q^nP^m$, su equivalente de Wigner sólo coincide con la expresión clásica $a(q,p)=q^np^m$, en el límite de $\hbar\to 0$.

$$\lim_{\hbar\to 0} a_w(q,p)=a(q,p),$$

Algo similar ocurre en el caso del producto de dos operadores arbitrarios. En efecto, la correspondiente operación en el espacio de las fases es el denominado producto de Groenwold[23]-Moyal*, que en general difiere del producto ordinario de funciones:

$$W^{-1}=(AB)=a_w * b_w = a_w b_w +$$

$$\tfrac{1}{2}\, i\hbar\ \{a_w,b_w\}_P+0(\hbar^2), \qquad (4)$$

(en el segundo miembro de la última igualdad, sólo hemos anotado explícitamente el primer orden en el desarrollo en serie de potencias $\hbar$ que define la operación *, la expresión completa puede verse en las Eqs. (6a) y (6b) de I). Está claro que la operación * no es conmutativa; por ejemplo, la regla de conmutación canónica en el nuevo formalismo se lee

$$q*p-p*p=i\hbar, \qquad (5)$$

y el equivalente de la ecuación de Heisenberg en el espacio de las fases es

$$i\hbar\,(da_w/dt)=a_w*h_w-h_w*a_w \qquad (6)$$

o, lo que es lo mismo, reemplazando por el segundo miembro de (4) (los términos con potencias pares de $\hbar$ se cancelan)

$$da_w/dt=\{a_w,h_w\}_P+0'(\hbar^2),$$

lo que revela la correspondencia de dicho formalismo con el de la Dinámica Hamiltoniana Clásica en el límite de $\hbar\to 0$.

El elemento que nos resta para completar el cuadro de la Mecánica Cuántica en el espacio de las fases, es una receta para calcular los valores de expectación de los observables o en general para calcular los elementos de matriz de los operadores de la teoría; tal como mostramos en I, en el formalismo de Wigner la misma viene dada por una expresión análoga a como se calculan los valores medios en Mecánica Estadística Clásica.

$$<\varphi|A(Q,P)|\psi>=\int\int a_w(q,p)F_w(q,p;\varphi,\psi)dqdp \quad , (7)$$

donde $F_w(q,p;\varphi,\psi)$ para $\varphi=\psi$, es la denominada función de distribución de Wigner, que resulta igual a h veces el equivalente de Wigner del operador densidad.

$$F_w(q,p;\varphi,\psi)=hW^{-1}(|\varphi><\varphi|). \quad (8)$$

III. EL PROPAGADOR DE LA ECUACIÓN DE SCHROEDINGER

Vamos ahora a darle utilidad a la expresión (7) calculando el propagador (función de Green homogénea) de la ecuación de Schroedinger:

$$<q''|U(t)|q'>=\int\int u_w(q,p;t)F_w(q,p;q'',q')dqdp. \quad (9)$$

Utilizando la expresión

$$F_w(q,p;q'',q')=(h)^{-1}\delta[q-\tfrac{1}{2}(q'+q'')]\exp[ip(q''-q')/\hbar], \quad (10)$$

que obtuvimos en I y reemplazando en (10), después de integrar en la variable q la expresión para el elemento de matriz del operador evolución finalmente nos queda

$$<q''|U(t)|q'>=(h)^{-1}\int u_w[\tfrac{1}{2}(q'+q''),p] \exp[ip(q''-q')/\hbar]\,dp. \quad (11)$$

Esta expresión nos dice que si conociéramos el equivalente de Wigner del operador evolución, $u_w(q,p;t)$, el propagador se obtendría simplemente efectuando una transformada de Fourier de dicha expresión, evaluada en el punto medio $\frac{1}{2}(q'+q'')$. Para fijar ideas, supongamos que el operador evolución es el correspondiente a una partícula libre de masa m. En este caso no hay problemas de ordenamiento y simplemente $u_w(q,p;t)=\exp[-ip^2t/2m\hbar]$, reemplazando ésta en (11) y efectuando la integral gaussiana, nos queda la conocida expresión para la amplitud de probabilidad

$$<q''|\exp[-iP^2t/2m\hbar]|q'>=(2\pi i\hbar t/m)^{-1/2} \exp[im(q''-q')^2/2\hbar t], \quad (12)$$

que contiene la acción clásica en la exponencial[24], al igual que la función de onda del método WKB. Sin embargo, la sencilla apariencia de la expresión (11) es engañosa, ya que como veremos en lo que sigue, todo el problema se halla concentrado en el cálculo de $u_w(q,p;t)$. La esencia de la dificultad se halla en que si bien no hay mayores problemas para encontrar el equivalente de Wigner de un operador hamiltoniano del tipo $H=P^2/2m+v(Q)$, el cual es simplemente $h_w=p^2/2m+v(q)$, no sucede lo mismo con el operador evolución

$$U(t)=\exp-i[P^2/2m+v(Q)]t/\hbar, \quad (13)$$

lo cual obliga de alguna manera a desarmar la exponencial. Como señalara Feynman[25] el *disentangle* de la exponencial (13) es, desde el punto de vista del cálculo operativo, el problema central de la Mecánica Cuántica. En otras palabras, dicho cálculo es el fondo equivalente a resolver la ecuación de Schoredinger, ya que si encontramos la base $\{\psi_n(q)\}$ que diagonaliza el hamiltoniano, el propagador es simplemente

$$<q''|U(t)|q'>=\sum_n \psi_n(q'')\,\psi_n{}^*(q')\exp(-iE_n t/\hbar). \quad (14)$$

La ventaja de una expresión como la (11) es que en el caso de no poder calcular $u_w(q,p;t)$, en forma exacta, en el marco del formalismo de Wigner podemos desarrollar un procedimiento sistemático para encontrar $u_w(q,p;t)$, en la forma de un desarrollo en serie de potencias a un orden dado en $\hbar$. De modo que reemplazándolo en (11), podemos obtener una expansión semiclásica del propagador[26] en forma análoga a como Wigner[8] y Kirkwood[27] originalmente desarrollaron la expansión semiclásica de la función de partición del conjunto canónico.

En la sección siguiente mostramos otro método, uno de los dos[28] procedimientos ideados por Feynman para lidiar con el *disentangle* de la exponencial (13).

IV. LA INTEGRAL DE CAMINO

Para pasar a la formulación de la Mecánica Cuántica vía integral de camino, siguiendo a Dirac[15], procedemos a dividir el intervalo $t''-t'$ en $N+1$ pequeños intervalos de duración $\epsilon=t_i-t_{i-1}$ con $i=0...N+1$ (haciendo la identificación: $t''\equiv t_{N+1}$, $t'\equiv t_0$). Teniendo en cuenta que el intervalo de tiempo del operador evolución es un parámetro aditivo resulta:

$$U(t''-t') = U(t''-t_N)\, U(t_N - t_N - 1) \ldots U(t_1 - t') \tag{15}$$

Insertando convenientemente los desarrollos de la identidad correspondientes a los proyectores $|q_i><q_i|$ y tomando el elemento de matriz entre los estados $|q''>$ y $|q'>$ finalmente tenemos que el propagador $<q''|U(t''-t')|q'>$ puede escribirse como

$$<q''|U(t''-t')|\,q'> = \int\int \ldots\ldots \int <q''|U(t''-t_N)|\cdot$$
$$|q_N><q_n|\; U(t_N - t_N - 1)\; |q_{N-1}> \ldots x <q_1|U(t_1-t')|q'>$$
$$dq_N dq_{N-1} \ldots dq_1 . \tag{16}$$

Ahora bien, la expresión (16), sólo nos exige el conocimiento del propagador infinitesimal $<q_i|U(\in)|q_{i-1}>$, el cual puede calcularse fácilmente por el método de Wigner a partir de (11), ya que a primer orden en $\in$

$$U(\in) = \exp(-i\,H \in /\hbar) = 1 - (i\,H \in /\hbar); \quad (\in << 1) \tag{17}$$

es decir

$$u_w(q,p;\in) = \exp\,[-ih_w(q,p) \in /\hbar], \tag{18}$$

de donde el propagador infinitesimal que resulta, de la ecuación (11), es:

$$<q_i|U(\in)|q_{i-1}> = (2\pi\hbar)^{-1} \int \exp[i\{p_i - p_{i-1})/\in - h_w$$
$$[\tfrac{1}{2}(q_i + q_{i-1}), p_i]\} \in /\hbar\;]dp_i$$

Sustituyendo lo anterior en la (16) nos queda:

$$<q''|U(t''-t')|q'> = (2\pi\;\hbar\;)^{(N+1)} \int \ldots \int \exp\,[i \sum_{i=1}^{N+1} \{$$
$$p_i(q_i - q_{i-1})/\in - h_w[\tfrac{1}{2}(q_i + q_{i-1}), p_i]\;\} \in /\hbar\,]$$
$$dq_N \ldots dq_1 dp_{N+1} \ldots dp_1, \tag{19}$$

que en el límite de $\in$ tendiendo a cero se convierte en una integral sobre todos los caminos en el espacio de las fases, siendo el exponente de la misma $i\hbar^{-1}$ veces la "acción clásica" [28] del sistema. Si el hamiltoniano del mismo es de la forma indicada en el exponente de (13), entonces $h_w(q,p) = h(q,p) = p^2/2m + v(q)$ y la expresión (19) puede integrarse en la variable p_i con ayuda de

$$(2\pi\hbar)^{-1} \int \exp\left\{ i\,[p_i(q_i - q_{i-1}) - \in (p_i)^2/2m]/\hbar \right\} dp_i =$$
$$A^{-1} \exp\,[im(q_i - q_{i-1})^2/2\hbar\in],$$

siendo $A = (2\pi\, i\hbar \in /m)^{1/2}$; de este modo la (19) puede reescribirse como una integral de camino en el espacio de configuraciones, en la forma en que originalmente fue propuesta por Feynman[14]:

$$<q''|U(t''-t')|q'> = (A)^{-(N+1)} \int \ldots \int \exp\,[i \sum_{i=1}^{N+1}$$
$$\{m(q_i - q_{i-1})^2/2\in^2 - v\,[\tfrac{1}{2}(q_i + q_{i-1})]\} \in /\hbar]\; dq_N \ldots dq_1 \tag{20}$$

V. COMENTARIOS FINALES

Una inspección ingenua de la expresión (19), la cual siguiendo a Feynman[14] podría haberse tomado como punto de partida para el desarrollo formal de la Mecánica Cuántica, parece haber borrado todo vestigio cuántico en relación con el problema de ordenamiento de operadores, ya que todas las cantidades que en ella figuran son funciones de las variables clásicas q y p. Sin embargo, del proceso que hemos seguido para construirla, queda claro que el problema de ordenamiento está escondido en la esqueletización particular que resultó de trabajar con la regla de ordenamiento de Weyl (esqueletización de punto medio)[30]. Por simplicidad, en nuestra discusión, nos hemos restringido al caso de dicha regla, porque ella corresponde a la función de distribución del espacio de las fases originalmente propuesta por Wigner y al algoritmo originalmente propuesto por Feynman para efectuar el cálculo de la integral de camino.

Sin embargo, es posible desarrollar un procedimiento sistemático que nos permita encontrar la esqueletización correspondiente a una dada regla de ordenamiento F arbitraria.

Para generalizar el formalismo de Wigner a una regla arbitraria, basta modificar la expresión (1a) con un factor de peso $f(\theta,\tau)$

$$F[\exp\; i\,(\theta q + \tau q)] = f(\theta,\tau) \exp\; i\,(\theta Q + \tau P),$$

como se demostrara en el trabajo de Cohen[9]. Ahora bien, utilizando el formalismo de Cohen y siguiendo un procedimiento análogo al que mostramos en este trabajo, se pueden calcular los propagadores infinitesimales correspondientes a una regla F arbitraria, y por ende la esqueletización correspondiente para el cálculo de la integral de camino. Por ejemplo, para el caso de la regla de simetrización S o regla de Rivier[31], $f(\theta,\tau)=\cos(\frac{1}{2}\theta\tau\ \hbar)$, la esqueletización resultante sustituye en (19) a $h_w=[\frac{1}{2}(q_i+q_{i-1}),P_i]$ por $\frac{1}{2}[hs(q_i,P_i)+hs(q_{i-1},P_i)]$.

Por último queremos destacar que lo que aparece en la acción de (19), no es la expresión clásica del hamiltoniano $h(q,\ p)$ sino su equivalente de Wigner, el cual sólo coincide con esta última si el operador H corresponde a un ordenamiento de Weyl de la expresión $h(q,\ p)$. En general si este no es el caso, siempre podrá encontrarse una esqueletización en la que esto suceda (la correspondiente a la regla con la cual fue ordenado H). Pero por el contrario, si se adopta como criterio de cuantificación el fijar la misma a una dada elección, (por ejemplo la que figura en la expresión (19)), está claro que en general uno debe agregar un término efectivo h_{eff}, al hamiltoniano clásico, ya que es fácil demostrar que si H es un operador hermítico[32].

$$h_w(q,p)=h(q,p)+h_{eff}(\hbar^2), \qquad (21)$$

lo que prueba una vez más que no es posible derivar la Mecánica Cuántica a partir de la Mecánica Clásica sin caer en ciertas contradicciones o ambigüedades, siguiendo un procedimiento de "cuantificación"[33].

En algunos trabajos se trasladan los términos efectivos (y con ello la ambigüedad del ordenamiento) a la elección de la medida de integración. En este trabajo la misma ha quedado fijada a la medida de Liouville que parece la elección más natural.

REFERENCIAS

1. W. Heisenberg. Z. Phys. **33**, 879 (1925); M. Born y P. Jordan. Z. Phys. **34**, 858 (1925); M. Born, W. Heisenberg y P. Jordan. Z. Phys. **35**, 557 (1926). Véanse también los trabajos de P. A. M. Dirac Proc. R. Soc. London, Ser. A, **109**, 642 (1926); **110**, 561 (1926).
2. E. Schroedinger, Ann. Phys. (Leipzig) **79**, 361 (1926); **79**, 489 (1926); **80**, 437 (1926); **81**, 109 (1926).
3. E. Schroedinger, Ann. Phys. (Leipzig) **79**, 734 (1926). Véase también C. Eckart Phys. Rev. **28**, 711 (1926).
4. P. A. M. Dirac Proc. R. Soc. London, Ser. A, **113**, 621 (1927); P. M. A. Dirac. *"The Principles of Quantum Mechanics"*. Oxford University Press, 1958.
5. J. Von Neuman, Gött. Nachr. 245 (1927); *"Mathematical Foundations of Quantum Mechanics"*. Princeton University Press, 1955.
6 Véase por ejemplo A. Messiah. *"Mecánica Cuántica"*. Tecnos, vol. 1, Capt. VIII, (1983).
7 Edgardo T. García Alvarez y Horacio M. Cataldo. *"El límite clásico de la Mecánica Estadística en la Formulación de Wigner"*. Anales AFA 4, que de aquí denominaremos I.
8. E. Wigner. Phys. Rev. **40**, 749 (1932). Una revisión de la misma fue publicada recientemente por Wigner y colaboradores. Véase M. Hillery, R. F. O' Connell, M. O. Scully y E. P. Wigner. Phys. Rep. **106**, 121 (1984).
9 H. Margenau y R. N. Hill. Prog. Theoret. Phys. **26**, 722 (1961); C. L. Metha, J. Math. Phys. **5**, 677 (1964); L. Cohen. J. Math. Phys. **7**, 781 (1966); G. S. Agarwal y E. Wolf. Phys. Rev. D **2**, 2161 (1970); **2**, 2187 (1970).
10. J. E. Moyal. Proc. Cambridge Phylos. Soc. **45**, 99 (1949).
11. H. Weyl. Z. Physik **46**, 1 (1927). *"The Theory of Groups, and Quantum Mechanics"*. Dover, 1950, pp 275.
12. K. Imre, E. Ozizmir, M. Rosenbaum, and P. Zweifel. J. Math. Phys. **8**, 1097 (1967).
13. B. Leaf. J. Math. Phys., **9**, 65 (1968).
14. R. P. Feynman. *"Space-time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics"*. Rev. Mod. Phys., **20**, 367; R. P. Feynman y A. R. Hibbs. *"Quantum Mechanics and Path Integrals"*. Mc Graw-Hill, 1965.
15. P. A. M. Dirac. Phys. Z. Sowjetunion **3**, 64 (1933). Véase también Dirac (1958) ref. 4, sec. 32.
16. En realidad la ecuación de Schroedinger también puede derivarse para el caso en que el lagrangiano contenga además un término del tipo $(dq/dt)\ a(q)$, como es el caso del correspondiente a una partícula cargada en un campo electromagnético. Véase ref. 14.
17. Véase por ejemplo E. S. Abers y B. W. Lee. Physics Reports 9C, 1 (Amsterdam, 1973), sec. 11.
18. La integral de camino en el espacio de las fases fue originalmente introducida por Feynman en Phys. Rev. **84**, 108 (1951) y posteriormente fue estudiada por C. Garrod (Rev. Mod. Phys. **38**, 483 (1966) y otros autores.
19. L. Cohen. J. Math. Phys. **11**, 3296 (1970); F. J. Testa. J. Math. Phys. **12**, 1471 (1971).
20. Una excepción es el texto de A. Galindo y P. Pascual. *"Mecánica Cuántica"*. Alhambra, 1978, cap. 3.
21. Por simplicidad a lo largo de este trabajo sólo consideramos las expresiones correspondientes a un grado de libertad, siendo evidente su generalización en la mayoría de los casos. Además hemos omitido los límites de integración que van de $-\infty$ a $+\infty$. Siguiendo la notación de I, a través de todo el trabajo, las magnitudes clásicas se notan con letra minúscula y los respectivos operadores con mayúscula.
22. La regla de Weyl tiene un significado concreto en el marco de la teoría de Grupos. En efecto (1b) es la regla que hace corresponder a todo elemento del grupo de las traslaciones en el espacio de las fases (grupo de Heisenberg-Weyl) la expresión clásica funcionalmente análoga.
23. H. J. Groenewold. Physica **12**, 405 (1946).
24. La anterior es una propiedad general de la aproximación semiclásica ($h\rightarrow 0$) y de cortos tiempos ($t\rightarrow 0$), para una discusión detallada véase I. Fujiwara. Prog. Theor. Phys. **21**, 902 (1959). En realidad la validez de dicha propiedad en la aproximación semiclásica, fue reconocida mucho tiempo antes de la aparición de los trabajos de Feynman por J. H. Van Vleck en Proc. Nat. Acad. Sci. **14**, 178 (1928) y P. A. M. Dirac (ref.15). La clave del trabajo de Feynman precisamente estuvo en reconocer que dicha propiedad también era válida en la aproximación de tiempos cortos (véase S. S. Schweber. Rev. Mod. Phys. **58**, 449 (1986).

25. Véase Feynman ref. 18.
26. El detalle de dicho método será discutido en un próximo trabajo.
27. J. G. Kirkwood. Phys. Rev. **44**, 31 (1933).
28. El otro procedimiento es el *Operator Calculus* discutido por Feynman en la ref. 18.
29. Véanse los comentarios de la sección siguiente.
30. La relación entre la regla de Weyl y la esqueletización de punto medio es discutida en detalle por T. D. Lee, en *"Particle Physics and Introduction to Field Theory"*. Hardwood Academic Publishers, 1981.
31. D. C. Rivier. Phys. Rev. **83**, 862 (L) (1957).
32 En efecto, aplicando la regla de Weyl a ambos miembros de (21) tenemos que $H(q,p) = W[h(q,p)] + 0(\hbar^2)$, en otras palabras (21) es equivalente a probar que los distintos ordenamientos correspondientes a operadores hermíticos difieren en términos del orden de $\hbar^2$. Para una discusión de este último punto véase ref. 33.
33. J. R. Shewell. Am. J. Phys. **27**, 16 (1959); E. T. García Alvarez y A. D. González. Am. J. Phys. **59**, 279 (1991).