EL ELECTRÓN DE de BROGLIE

S. Albertali, G. Bertoluzzo, M. Delannoy y C. Galles
Departamento de Química-Física, Facultad de Ciencias Bioquímicas y Farmacéuticas, Suipacha 531, (2000) Rosario

De Broglie's oscillatory model of the electron -generally ignored in Courses on Modern Physics- is analyzed in this work. With it, it is possible to visualized the frecuencies measured by different observers and the so-called phase velocity. The non relativistic limit of Hamilton-Jacobi's theory for a free electron and for the lectron subjected to a central potencial is also discussed. Results are compared with those obtained by other authors.

I. INTRODUCCIÓN

Las ideas desarrolladas por de Broglie en 1923 en su tesis doctoral y que sirvieron como punto de partida para la mecánica ondulatoria, son utilizadas en los textos de mecánica cuántica solamente como un medio para introducir la ecuación de Schrodinger. Sólo se presenta la relación $\lambda = h/p$ entre la longitud de onda λ de las ondas de de Broglie y el momento p de una partícula. Esta relación se aplica luego a la difracción de electrones y se menciona su verificación experimental, sin decir nada acerca de la naturaleza de estas ondas. Algunos textos hacen breve mención a la velocidad de las mismas. Tal es el caso del el *Vol III-Campos y ondas de Alonso-Finn*, texto elemental de Física Moderna, o *Mecánica Cuántica* de Davidov, texto utilizado en los cursos de Mecánica Cuántica.

En el presente trabajo se analiza el modelo del electrón presentado por de Broglie y la naturaleza de las ondas asociadas al mismo, enfatizando que se trata de un concepto relativista. Este modelo aunque algo burdo, le sirvió a de Broglie para explicar la relación entre la frecuencia intrínseca asociada a una partícula (ν_0), la frecuencia intrínseca medida por un observador externo que ve a la partícula moviéndose con una velocidad "V" ($\nu_1 = \nu_0(1-\beta^2)^{1/2}$) y la frecuencia que este observador asociaría con la energía total de la partícula ($\nu = \nu_0(1-\beta^2)^{-1/2}$). Siguiendo los pasos de la tesis de de Broglie, se muestra la interpretación de dichas frecuencias a través de un diagrama de Minkowski. A continuación se aplica la teoría de Hamilton-Jacobi a una partícula libre y a una partícula en un potencial central, obteniéndose la velocidad de las ondas de fase en el caso relativista. Se halla el límite no relativista de dicha velocidad en el marco de la teoría de Hamilton-Jacobi. Finalmente se hacen algunas consideraciones sobre las consecuencias y repercusiones de la famosa tesis de de Broglie.

II. TESIS DE de BROGLIE

Las razones que llevaron a de Broglie a elaborar su tesis puede resumirse en lo siguiente:

1) La aparente asimetría en la naturaleza de acuerdo a las teorías físicas del momento. Pleno convencimiento que las ondas electromagnéticas tenían propiedades corpusculares, como fue postulado por Planck en 1900 y Einstein en 1905 a través de la relación $E = h\nu$, mientras los electrones eran considerados como partículas sin propiedades ondulatorias.

2) Debates previos sobre dualidad onda-partícula. Podría considerarse la discusión entre W. Bragg que sugirió que los rayos X podrían considerarse como partículas alfa asociadas con partículas beta, y C. Barkla que se oponía a esta interpretación corpuscular.

3) La teoría especial de la relatividad. A partir de la equivalencia entre masa y energía se postuló que ondas electromagnéticas y electrones eran ambos forma de energía. Las primeras tenían propiedades ondulatorias y corpusculares, mientras que los electrones tenían solamente propiedades corpusculares ($E_0 = m_0c^2$).

Para recuperar una imagen simétrica, de Broglie postuló lo siguiente: Por una ley de la naturaleza, a cada porción de energía de masa m_0 está ligado un fenómeno ondulatorio de frecuencia ν_0 tal que:

$$m_0c^2 = h\nu_0 \tag{1}$$

en el sistema ligado al trozo de energía.

Si la porción de energía (partícula) se mueve con velocidad $v = \beta c$ respecto de un observador, que llamaremos "externo", surge un problema con el concepto de frecuencia. Teniendo en cuenta que la frecuencia es inversamente proporcional al período T_0 y aplicando la transformación de Lorentz del tiempo $t'=(t-vx/c^2)(1-\beta^2)^{-1/2}$ se obtiene una frecuencia $\nu_1 = \nu_0(1-\beta^2)^{1/2}$. Por otra parte el observador externo, que ve la partícula como un sistema en movimiento le atribuye una energía $E=m_0 c^2(1-\beta^2)^{-1/2}$. Si las leyes de la física deben ser válidas en todos los sistemas inerciales, este observador podrá aplicar la expresión (1) en su propio sistema para obtener la frecuencia correspondiente a la energía que él mide: $\nu=\nu_0(1-\beta^2)^{-1/2}$.

Surgen así tres frecuencias diferentes para una misma partícula: ν_0 frecuencia interna en el sistema de reposo, ν_1 frecuencia interna medida para un observador externo y ν la frecuencia que este observador asociaría con la energía total de la partícula. Este problema preocupó a de Broglie[1] y lo llevó a enunciar y demostrar el siguiente *Teorema de armonía de fases*: el fenómeno ondulatorio ligado a la partícula cuya frecuencia para el observador externo es $\nu_1 = \nu_0(1-\beta^2)^{1/2}$ se le presenta constantemente en fase con una onda de frecuencia $\nu=\nu_0(1-\beta^2)^{-1/2}$, que se propaga en la misma dirección que la partícula con velocidad $V=c/\beta$ (o c^2/v)[2]. Se observa que la velocidad de las ondas V es mayor que c, por lo tanto estas ondas no transportan energía, sino que representan la distribución de las fases de un fenómeno en el espacio y por tal motivo fueron designadas por de Broglie "*ondas de fase*".

III. MODELO DEL ELECTRÓN PROPUESTO POR de BROGLIE

Para interpretar esta situación, de Broglie propone un modelo mecánico "*un peu grossiére, mais qui parle á l'imagination*"[3]. Considera un plano horizontal circular de radio muy grande, del cual están suspendidos sistemas masa-resorte idéntico, distribuidos de modo tal que la densidad disminuye desde el centro hacia la periferia (Fig. 1). Todos los sistemas masa-resorte tienen el mismo período y oscilan con la misma amplitud y la misma fase. La superficie que pasa por los centros de gravedad de todas las masas constituye un plano que sube y baja alternativamente con una frecuencia ν_0.

El sistema así presentado es una analogía grosera de la porción de energía (partícula). Esta descripción es válida para un observador ligado al plano. Si otro observador ve pasar el plano con velocidad $V=\beta c$ (observador externo), cada sistema masa-resorte constituye un pequeño reloj que sufre un atraso debido a la dilatación del tiempo y cuya frecuencia propia será ν_1. Para visualizar la interpretación de la onda de fase (de frecuencia ν) se recurre a un diagrama de Minkowski, en el cual x y ct son las coordenadas del espacio-tiempo del observador externo, x' y ct' son las coordenadas del observador ligado a la partícula móvil. Estas coordenadas están relacionadas por las transformaciones de Lorentz

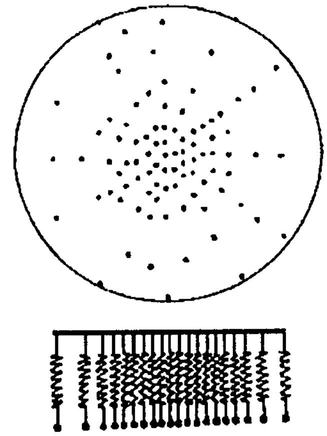

Fig. 1: (Ver texto).

$$x'=\gamma(x-vt) \quad \text{y} \quad t'=\gamma(t-vx/c^2)$$

donde

$$\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$$

Si consideramos $x'=0$ y $ct'=0$, es fácil ver que $tg\,\alpha=\beta$ y $tg\,\delta=1/\beta$ (Fig. 2).

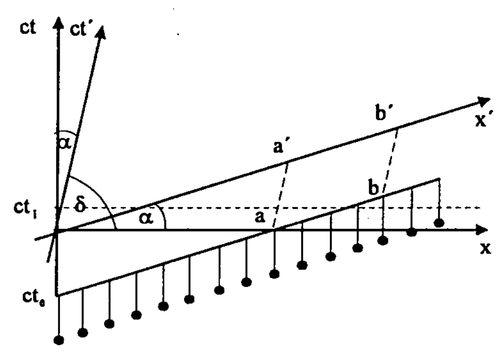

Fig. 2: (Ver texto).

Los sistemas masa-resorte aparecen en la fase para el observador ligado a la partícula, pero están desfasados para el observador externo. Este último, en un tiempo $t = 0$, ve un resorte en el punto a con una fase determinada, en un tiempo posterior $t = t_1$, verá en b la misma fase pero en otro resorte. Para este observador la fase parecerá desplazarse con una velocidad $V = (b_x - a_x)/t_1 = c/\beta$, velocidad de la onda de fase.

La frecuencia con que se repite la fase para el observador externo puede determinarse por medio de la Fig. 3. Un resorte totalmente elongado en el punto O volverá a tener la misma elongación en el punto A, el tiempo transcurrido en el sistema primado será un período $T' = 1/\nu_0$, donde ν_0 es la frecuencia interna. El observador externo que ve un resorte totalmente elongado en O, volverá a ver otro resorte con la misma fase en B, el tiempo trancurrido en este sistema será $T = 1/\nu$, ν es la frecuencia asociada con la onda de fase. Usando las transformaciones de Lorentz se obtiene $\nu = \nu_0(1-\beta^2)^{-1/2}$.

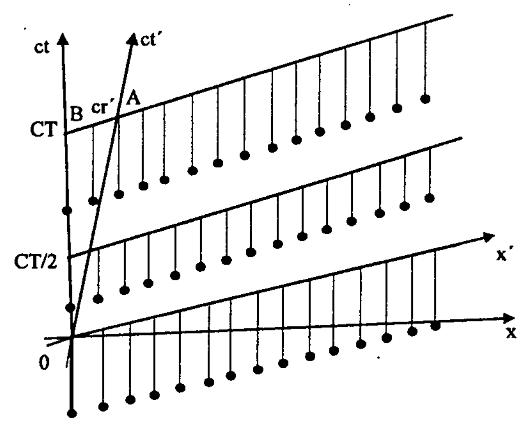

Fig. 3: (Ver texto).

Es interesante destacar que la onda de fase es un fenómeno relativista, ya que su velocidad V y su frecuencia ν sólo están definidas para el observador externo vinculado al sistema oscilante por medio de las transformaciones de Lorentz.

IV. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE HAMILTON-JACOBI

Es interesante usar la teoría de Hamilton-Jacobi para hallar la velocidad de las ondas de fase presentadas por de Broglie, en el caso relativista y en el límite clásico.

La ecuación de Hamilton-Jacobi es[5]:

$$H(q_i, \partial S/\partial q_i, t) + \partial S/\partial t = 0$$

el hamiltoniano relativista para una partícula libre, moviéndose con velocidad v se escribe

$$H = c(p^2 + m_0^2 c^2)^{1/2} \tag{2}$$

Si H no depende explícitamente del tiempo, la función principal de Hamilton S está dada por:

$$S = (q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - Et \tag{3}$$

entonces:

$$H(q_i, \partial S/\partial q_i, t) = E,$$

siendo E la energía total del sistema. Teniendo en cuenta la expresión (3) se puede ver que las superficies de S constante se desplazan en el espacio de configuración análogamente a la propagación de un frente de onda.

La velocidad de un punto dado de una superficie de S constante viene dada por $V = ds/dt$, donde s es el desplazamiento. En un dt la superficie S pasa de un valor W a $W+dW$, con $dW = E\,dt$, y $dW = |\nabla W| ds$, se tiene $V = E/|\nabla W|$. Si se aplica esto al hamiltoniano dado en la expresión (2), se obtiene para la velocidad de las ondas:

$$V = c^2/v$$

éste es justamente el valor de la velocidad de las ondas de fase dado por de Broglie.

Si ahora se considera el caso clásico, el hamiltoniano es:

$$H = p^2/2m$$

y se obtiene para la velocidad de las ondas:

$$V = v/2$$

En el caso de una partícula en un potencial central, el hamiltoniano relativista es:

$$H = c(p^2 + m_0^2 c^2)^{1/2} + k/r$$

y resulta:

$$V = [m_0 c^2 (1-\beta^2)^{-1/2} + k/r]/[m_0 v (1-\beta^2)^{-1/2}]$$

y en el caso no relativista:

$$H = p^2/2m + k/r$$

y

$$V = [m_0 v^2/2 + k/r]/m_0 v$$

Estos resultados coinciden con los hallados por J. Espinosa[6] sin necesidad de recurrir a la separación de la frecuencia en dos términos sugerida por este autor.

V. COMENTARIOS

1) Se han obtenido las velocidades de fase en los casos relativista y clásico a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi, sin apelar a consideraciones cuánticas (comparar con Davidov[7], página 5).

La hipótesis de de Broglie equivale a atribuir a las ondas de Hamilton-Jacobi una frecuencia, y por lo tanto una longitud de onda relacionadas por: $\lambda = V / \nu$, de donde,

$$\lambda = hV / E = h / |\nabla W| = h / p$$

2) En el caso de la ecuación de Dirac, se tiene como solución el espinor:

$$\Psi(x) = e^{-ik_\mu x^\mu} u(k)$$

La parte exponencial en el sistema en reposo se escribe:

(dado que $k_\mu = (0,0,0,mc^2)$)

$$e^{ik_\mu x^\mu} = e^{i} mc^2 t = \cos mc^2 t + i \operatorname{sen} mc^2 t$$

es decir, una onda estacionaria.

Para una partícula en movimiento, según el eje x, la misma expresión vale:

$$e^{-i}[(mv / \sqrt{1-\beta^2})x + (mc / \sqrt{1-\beta^2})\, t]$$

a la cual le corresponde una velocidad de fase

$$V = [mc^2(1-\beta^2)^{-1/2}] / [mv(1-\beta^2)^{-1/2}] = c^2 / v$$

que coincide con la obtenida por de Broglie.

3) La tesis de de Broglie es un caso excepcional de obtención de resultados correctos a partir del intento de visualización de una teoría sin tener un formalismo completo de la misma. La travesía de Heisenberg fue diferente, pues primero obtuvo el formalismo cuántico y luego la interpretación física del mismo a través de las relaciones de incertidumbre. En la tesis de de Broglie se vislumbran dichas desigualdades. En especial nótese que el electrón está en el modelo grosero claramente esparcido en el espacio. La interpretación de la onda como una fusión de probabilidad, introducida por Max Born, es ajena a las especulaciones de de Broglie.

4) La velocidad c^2 / v es la misma que da respuesta a la siguiente pregunta. Si dos sistemas k y k' coinciden en el origen para $t = t' = 0$, ¿dónde estará el reloj k' que en un tiempo posterior t (medido en el sistema en reposo k) marque un tiempo $t = 0$? Por aplicación de las transformaciones de Lorentz:

$$t' = 0 \rightarrow \quad 0 = t - (v / c^2) \quad x \rightarrow V = c^2 / v$$

lo que se puede ver fácilmente en un diagrama de Minkowski. Es de remarcar que de Broglie siempre sostuvo una similitud entre la partícula y un "*petite horloge*".

5) Estas consideraciones sobre las ondas de de Broglie se prestan para un interesante análisis en los cursos previos al de Mecánica Cuántica (sea en el curso de Mecánica Clásica o en una introducción a la Física Moderna), tanto para una clara comprensión del punto preciso donde la nueva teoría se aparta de la Mecánica Clásica, como por el uso intensivo del diagrama de Minkowski.

REFERENCIAS

1. Louis de Broglie. Recherches sur la theoriés Des Quanta. Ann. Phys. (Paris) **22**, (1925) pp. 34.
2. Tesis (ref.1) pp. 35.
3. Tesis (ref.1) pp. 36.
4. E. Mac Kinnon. Am. J. Phys. **44**, N°11, 1047. 1976.
5. Goldstein. Mecánica Clásica.
6. J. M. Espinosa. Am. J. Phys. **50**, (4), 357. 1982.