FORMULACIÓN DE LA MECÁNICA CUÁNTICA RELATIVISTA PARAMETRIZADA CON UN TIEMPO PROPIO. II

F. H. Gaioli *, E. T. García Alvarez *

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, (1428) Buenos Aires, Argentina.

En una serie de trabajos previos analizamos una formulación de la Mecánica Cuántica Relativista basada en una parametrización de la ecuación de Dirac originalmente propuesta por Feynman. En este trabajo discutimos la interpretación del producto escalar indefinido introducido anteriormente. El signo de la norma posibilita clasificar a los estados en estados de "partícula" y "antipartícula". Se utiliza la extensión del álgebra de Poincaré propuesta por Johnson de modo tal de incluir un cuadrioperador posición en la teoría y se discute el problema de la localización en este marco, el cual puede ser resuelto manteniendo la covariancia a expensas de considerar estados de masa indefinida.

I. INTRODUCCIÓN

En una serie de trabajos previos[1] hemos discutido una formulación de la Mecánica Cuántica Relativista basada en una parametrización de la ecuación de Dirac originalmente propuesta por Feynman[2] y cuyas ideas básicas se remontan a los trabajos originales de Fock[3] y Stükelberg[4].

La idea central de dicha formulación puede resumirse en la posición adoptada al unificar los formalismos antagónicos de la mecáncia cuántica y la relatividad especial en relación con el rol e interpretación que juega el concepto de tiempo en la nueva teoría (Mecánica Cuántica Relativista). En efecto, mientras que el formalismo de la relatividad especial (a excepción de la signatura de la métrica) trata a las cuatro coordenadas del espacio–tiempo en pie de igualdad, el formalismo canónico de la mecánica cuántica privilegia un parámetro externo que etiqueta la evolución de los estados del sistema. De este modo, el rol dual de la coordenada temporal en el formalismo estándar de la mecánica cuántica relativista, entra en conflicto, ya que las transformaciones de Lorentz mezclan las cuatro coordenadas x^{μ} del espacio–tiempo mientras que, en mecánica cuántica, sólo las coordenadas espaciales son promovidas al rango de operadores. Como veremos luego, esta es en esencia la razón por la cual la teoría de una partícula en la formulación estándar presenta ciertas dificultades conceptuales tales como la interpretación de las energías negativas, el problema de la localización[5], la paradoja de Klein[6], etc.[7].

La solución propuesta en A consiste pues en elevar la coordenada x_0 al rango de operador, e introducir un nuevo parámetro escalar en la teoría que determine la evolución de los estados del sistema. Para el caso de spin 1/2, en el cuadro de Schrödinger en representación de coordenadas, la evolución del estado del sistema, caracterizado por la función de onda $\psi(x^{\mu},s)$, viene dada por la ecuación propuesta originalmente por Feynman[2] :

$$-i\frac{d}{ds}\psi(x^{\mu},s)=i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\,\psi(x^{\mu},s), \qquad (1)$$

donde, por simplicidad, nos hemos restringido al caso libre. Como mostramos en A, la ecuación (1) sugiere interpretar como "producto escalar" de la teoría a la cantidad conservada en el "tiempo" s:

$$\langle\phi|\psi\rangle=\int\bar{\phi}\,(x^{\mu},s)\,\psi(x^{\mu},s)\,d^4x. \qquad (2)$$

Dado que la forma sesquilineal (2) no es definida positiva, fue sugerido en A que la "norma" asociada a (2) debe ser interpretada como una medida de la carga[8]. Más precisamente, debemos interpretar a $\bar{\psi}(x^{\mu},s)\,\psi(x^{\mu},s)\,d^4x$ como una "densidad de probabilidad" de encontrar una carga en el elemento de volumen del espacio–tiempo d^4x en el instante s para un sistema en el estado $\psi(x^{\mu},s)$. Sin embargo, debido a la indefinición en el signo de la

* Becario Universidad de Buenos Aires

norma, el concepto de probabilidad y por ende, la interpretación estadística de la teoría, requieren cierto cuidado[9]. Discutiremos este punto en la próxima sección.

Señalaremos por último que, con la noción de hermiticidad que se deriva de la ecuación (2), la función de onda $\psi(x^\mu, s)$ corresponde a una representación unitaria del grupo de Lorentz homogéneo, es decir,

$$\psi'(x'^\mu, s) = \exp\left\{\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\hat{M}^{\mu\nu}\right\}\psi(x^\mu, s), \qquad (3)$$

donde $\hat{M}^{\mu\nu} = \hat{L}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$ es el tensor momento angular total y $\varepsilon_{\mu\nu}$ son los parámetros aditivos del grupo de Lorentz. En otras palabras, en el producto escalar dado por (2), el operador $\hat{M}^{\mu\nu}$ es hermítico, a diferencia de lo que sucede en la formulación estándar, donde σ^{0i} es antihermítico y $\hat{L}^{0i}$ no es un operador en el espacio de Hilbert ordinario (ver Apéndice). En la sección III mostraremos que $\psi(x^\mu)$ corresponde a una representación irreducible de una extensión del grupo de Poincaré (que incluye las traslaciones en el espacio de los impulsos), al que denominaremos grupo *XPM*, cuya álgebra de Lie fue introducida originalmente por Johnson[10].

II. INTERPRETACIÓN DEL PRODUCTO ESCALAR

Dado que el signo de la carga distingue partículas de antipartículas en la teoría estándar, la discusión efectuada en relación con la expresión (2), nos sugiere clasificar a los estados de la nueva teoría como estados de "partícula" y de "antipartícula" según el signo de la norma. Como veremos, dicha interpretación está basada en el principio de correspondencia con la teoría estándar, donde conceptos de partícula y antipartícula corresponden a estados asintóticos libres, de "masa definida". Como vimos en *A* un estado $\psi(x^\mu)$ es, en general una combinación lineal de autoestados de la masa $\phi_m(x^\mu)$:

$$\gamma^\mu \hat{p}_\mu\, \phi_m(x^\mu) = m\phi_m(x^\mu)\,, \qquad (4)$$

donde, en general m tiene un valor arbitrario. Consideremos un estado $\phi_m(x^\mu)$ que sea un autoestado del impulso $\hat{p}_\mu$, de tipo temporal ($p^\mu p_\mu > 0$),

$$p_\mu\, \phi_{m,p}(x^\mu) = p_\mu \phi_{m,p}(x^\mu) \qquad (5)$$

es decir, $\phi_{m,p}(x^\mu)$ es una onda plana de la forma:

$$\phi_{m,p}(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\, u(p)\, e^{-ip_\mu x^\mu}. \qquad (6)$$

De (4), (5) y el álgebra de las matrices γ se obtiene la ecuación que define al hiperboloide de masa:

$$m^2 = p_\mu p^\mu = p_0^2 - \vec{p}^{\,2}, \qquad (7)$$

es decir, m puede ser positivo o negativo. Ahora bien, toda solución (4) y (5) de masa m e impulso p_μ es también una solución de dichas ecuaciones con masa $-m$ e impulso $-p_\mu$, o sea, $\phi_{m,p}(x^\mu) = \phi_{-m,-p}(x^\mu)$. De aquí se sigue que, toda solución de masa negativa (m < 0), energía positiva ($p_0 > 0$) e impulso $\vec{p}$ es equivalente a una solución de masa positiva, energía negativa e impulso $-\vec{p}$ (estado de antipartícula, $\varepsilon = -1$). Más aún, una solución de masa negativa, energía negativa e impulso $\vec{p}$ es equivalente a un estado con masa positiva, energía positiva e impulso $-\vec{p}$(estado de partícula, $\varepsilon = +1$). Entonces, los estados de partícula y antipartícula quedan clasificados[11] por el producto de los signos de la masa y la energía:

$$\varepsilon = \mathrm{sg}(p_0) \times \mathrm{sg}(m).$$

Consideremos la norma de los estados de partícula o antipartícula de la forma (6) normalizados a un cuadrivolumen finito Ω :

$$\left\langle \phi_{m,p} \middle| \phi_{m,p} \right\rangle = \int_\Omega \bar{\phi}_{m,p}(x^\mu)\, \phi_{m,p}(x^\mu)\, d^4x = \bar{u}(p)u(p) \qquad (8)$$

De (6) y (4) se sigue que el spinor $u(p)$ satisface $\gamma^\mu p_\mu u(p) = mu(p)$ y multiplicando a izquierda por $\bar{u}(p)$ tenemos que $\bar{u}(p)\gamma^\mu u(p) p_\mu = m\bar{u}(p)u(p)$, es decir, la norma del estado $|\phi_{m,p}\rangle$ finalmente resulta:

$$\left\langle \phi_{m,p} \middle| \phi_{m,p} \right\rangle = \frac{p_\mu}{m}\, \bar{u}(p)\, \gamma^\mu u(p). \qquad (9)$$

El segundo miembro de (9) es un invariante relativista, que en el referencial de reposo $\vec{p}=0$, adopta la expresión $\frac{p_\mu}{m}[\bar{u}(p)\gamma^\mu u(p)]=\frac{p_0}{m}[u(p)^\dagger u(p)]$ $u^\dagger u$ es siempre positivo y el signo de p_0 es invariante frente al cambio del sistema de referencia, por lo que el signo de (9), resulta ser igual a ε:

$$\mathrm{sg}\left(\left\langle \psi_{m,p} \middle| \psi_{m,p} \right\rangle\right)=\varepsilon, \tag{10}$$

lo que hace plausible la clasificación propuesta al principio de esta sección[12]. La demostración aquí expuesta corresponde al caso particular de masa definida. La misma puede ser extendida al caso de masa indefinida para los estados pertenecientes a los subespacios de masa positiva o negativa, entendiendo al sg(m) como el autovalor del operador $\frac{H}{\sqrt{H^2}}$.

III. EL GRUPO XPM

El conjunto de transformaciones lineales en el espacio de configuración que deja invariante la forma cuadrática.

$$d\tau^2=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{11}$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski (1,–1, –1, –1), es el denominado grupo de Poincaré. El estudio de las representaciones irreducibles de dicho grupo, ha sido de gran importancia en el desarrollo de la física de partículas elementales[13]. En efecto, las funciones de onda de las distintas ecuaciones relativistas de sistemas caracterizados por el valor de la masa y del spin (Klein-Gordon, Dirac, Proca,...), transforman según tales representaciones irreducibles. Como mostramos en II, la liberación del vínculo masivo (ecuación (7)) nos permite construir un espacio de las fases con 4+4 coordenadas independientes, x^μ y p_μ, lo cual nos abre ahora la posibilidad de estudiar el conjunto de transformaciones lineales en el espacio de las fases que deja invariante la dinámica, grupo de transformaciones canónicas, para luego estudiar las representaciones irreducibles de dicho grupo. Allí también hemos comentado la posibilidad de obtener la teoría desarrollada en A efectuando la cuantificación canónica de una teoría clásica en una formulación hamiltoniana explícitamente covariante en dicho espacio de las fases.

Repasemos brevemente la teoría de transformaciones canónicas en tal caso. Consideremos pues, una función $f\left(x^\mu,p^\mu\right)$ definida sobre el espacio de las fases. La derivada total respecto del parámetro invariante s (que no debe confundirse con el tiempo propio τ) es:

$$\frac{df}{ds}=\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{ds}+\frac{\partial f}{\partial p^\mu}\frac{dp^\mu}{ds} \tag{12}$$

Por medio de las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dx^\mu}{ds}=\frac{\partial H}{\partial p_\mu}, \qquad \frac{dp_\mu}{ds}=-\frac{\partial H}{\partial x^\mu}. \tag{13}$$

podemos reescribir la ecuación (12) como:

$$\frac{df}{ds}=\{f,H\}, \tag{14}$$

donde H es un hamiltoniano escalar y

$$\{f,g\}=\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial g}{\partial p_\mu}-\frac{\partial f}{\partial p_\mu}\frac{\partial g}{\partial x^\mu}, \tag{15}$$

posee formalmente las propiedades que definen un corchete de Poisson, el cual es invariante ante transformaciones de Lorentz si las funciones f y g son escalares. El conjunto de transformaciones de las coordenadas y momentos que dejan invariante a la ecuación (14) (o, lo que es equivalente, que preserva los corchetes canónicos) se conoce como conjunto de transformaciones canónicas:

$$\tilde{x}^\mu=\tilde{x}^\mu\left(x^\alpha,p_\beta\right), \quad \tilde{p}_\mu=\tilde{p}_\mu\left(x^\alpha,p_\beta\right) \tag{16}$$

Consideremos las transformaciones canónicas infinitesimales:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^\mu&=x^\mu+\delta x^\mu=x^\mu+\left\{x^\mu,G\right\}=x^\mu+\frac{\partial G}{\partial p_\mu},\\ \tilde{p}_\mu&=p_\mu+\delta p_\mu=p_\mu+\left\{p_\mu,G\right\}=p_\mu-\frac{\partial G}{\partial x^\mu},\end{aligned} \tag{17}$$

donde G es la función generatriz infinitesimal, la cual es, a primer orden, una función de x^{μ} y p_{μ}. Podemos entonces, encontrar las transformaciones canónicas lineales infinitesimales en el espacio de las fases más generales. Este conjunto de transformaciones tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}^{\mu} &= x^{\mu} + (\varepsilon_{xx})^{\mu\nu} x_{\nu} + (\varepsilon_{xp})^{\mu\nu} p_{\nu} + a^{\mu}, \\
\tilde{p}_{\mu} &= p_{\mu} + (\varepsilon_{px})_{\mu\nu} x^{\nu} + (\varepsilon_{pp})_{\mu\nu} p^{\nu} + b_{\mu},
\end{aligned}
\tag{18}
$$

donde los parámetros ε, a^{μ} y b_{μ} son infinitesimales. La preservación de los corchetes fundamentales impone ciertas condiciones sobre los parámetros que, sumado al hecho de que sólo estamos interesados en el grupo de tales transformaciones que dejen invariante al elemento de arco $d\tau^{2} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$, eliminando además aquellos términos que puedan ser absorbidos por medio de una transformación de gauge $((\varepsilon_{px})_{\mu\nu} x^{\nu}$ en la segunda de las ecuaciones (18)), obtenemos finalmente:

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}^{\mu} &= x^{\mu} + \varepsilon^{\mu\nu} x_{\nu} + a^{\mu}, \\
\tilde{p}_{\mu} &= p_{\mu} + \varepsilon_{\mu\nu} p^{\nu} + b_{\mu}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

donde $\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}$. Esta transformación es generada por:

$$
G_{XPM} = -\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{2} M^{\mu\nu} + a^{\mu} p_{\mu} - b_{\mu} x^{\mu}, \tag{20}
$$

donde $M^{\mu\nu} = x^{\mu} p^{\nu} - x^{\nu} p^{\mu}$.

El álgebra de Lie del grupo que de aquí resulta[10] es:

$$
\begin{aligned}
&\{x^{\mu}, p^{\nu}\} = \eta^{\mu\nu}, \\
&\{x^{\mu}, x^{\nu}\} = 0 = \{p^{\mu}, p^{\nu}\}, \\
&\{M^{\mu\nu}, x^{\tau}\} = x^{\nu}\eta^{\mu\tau} - x^{\mu}\eta^{\nu\tau}, \\
&\{M^{\mu\nu}, p^{\tau}\} = p^{\nu}\eta^{\mu\tau} - p^{\mu}\eta^{\nu\tau}, \\
&\{M^{\mu\nu}, M^{\tau\lambda}\} = \eta^{\mu\lambda} M^{\tau\nu} - \eta^{\nu\lambda} M^{\tau\mu} + \eta^{\nu\tau} M^{\lambda\mu} - \eta^{\mu\tau} M^{\lambda\nu},
\end{aligned}
\tag{21}
$$

donde los generadores del mismo x^{μ}, p_{μ} y $M^{\mu\nu}$ están asociados con las simetrías ante traslaciones en el espacio de energía–momentos, traslaciones espacio–temporales y rotaciones en el espacio–tiempo, respectivamente. De esta forma el grupo *XPM* es una extensión del grupo de Poincaré. Procedamos a la cuantificación canónica de la teoría y discutamos algunos de sus puntos salientes.

La cuantificación de un sistema clásico no es otra cosa que la representación unitaria de un grupo de simetrías que a nivel clásico está dado por el grupo general de transformaciones canónicas. Esto puede lograrse en forma heurística por medio del procedimiento de cuantificación canónica de Dirac, que asigna un operador a cada variable clásica según la siguiente correspondencia lineal:

$$
\hat{a} = \mathcal{F}\left(a(x^{\mu}, p_{\mu})\right), \tag{22}
$$

tal que $\mathcal{F}$ satisface:

$$
-i\,\mathcal{F}(\{a,b\}) = [\mathcal{F}(\hat{a}), \mathcal{F}(\hat{b})], \tag{23}
$$

donde el signo está puesto de forma tal de preservar los conmutadores usuales para la parte espacial. Para las relaciones de conmutación entre los generadores del grupo *XPM* esta asignación es unívoca (no presenta los problemas de ordenamiento de operadores[14]). La transformación unitaria $\hat{U}$ correspondiente al cambio de coordenadas (16) está dada por:

$$
\hat{U} = e^{-i\hat{G}_{XPM}}, \tag{24}
$$

donde $\hat{G}_{XPM}$ es el operador hermítico correspondiente a la expresión (20). El álgebra de los conmutadores *XPM* correspondiente a (21) es:

$$
\begin{aligned}
&[\hat{x}^{\mu}, \hat{p}^{\nu}] = -i\eta^{\mu\nu}, \\
&[\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}] = 0 = [\hat{p}^{\mu}, \hat{p}^{\nu}], \\
&[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{x}^{\tau}] = -i(\hat{x}^{\nu}\eta^{\mu\tau} - \hat{x}^{\mu}\eta^{\nu\tau}), \\
&[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{p}^{\tau}] = -i(\hat{p}^{\nu}\eta^{\mu\tau} - \hat{p}^{\mu}\eta^{\nu\tau}), \\
&[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{M}^{\tau\lambda}] = -i(\eta^{\mu\lambda}\hat{M}^{\tau\nu} - \eta^{\nu\lambda}\hat{M}^{\tau\mu} + \eta^{\nu\tau}\hat{M}^{\lambda\mu} - \eta^{\mu\tau}\hat{M}^{\lambda\nu})
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Dicha álgebra, al igual que el álgebra de momento angular en mecánica cuántica no relativista, obtenida a partir de la cuantificación del álgebra clásica del momento angular orbital, admite más representaciones que las correspondientes al caso de spin 0. Análogamente a lo que sucede en dicho caso con el álgebra formada por el momento angular total, la posición y el impulso, el álgebra *XPM* puede desacoplarse si consideramos un operador $\hat{M}^{\mu\nu}$ de la forma:

$$\hat{M}^{\mu\nu} = \hat{L}^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}, \qquad \left(\hat{L}^{\mu\nu} = \hat{x}^{\mu}\hat{p}^{\nu} - \hat{x}^{\nu}\hat{p}^{\mu}\right), \quad (26)$$

de la siguiente manera:

$$\left[\hat{x}^{\mu}, \hat{p}\right] = -i\eta^{\mu\nu},$$

$$\left[\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}\right] = 0 = \left[\hat{p}^{\mu}, \hat{p}^{\nu}\right], \quad (27)$$

$$\left[\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\tau\lambda}\right] = -i\left(\eta^{\mu\lambda}\sigma^{\tau\nu} - \eta^{\nu\tau}\sigma^{\tau\mu} + \eta^{\nu\tau}\sigma^{\lambda\mu} - \eta^{\mu\tau}\sigma^{\lambda\nu}\right)$$

Vemos entonces que, la representación del grupo *XPM* se consigue a partir del producto directo del grupo covariante de Heisenberg-Wey[15] y del grupo de Lorentz homogéneo[16]. Esto es análogo a lo que sucede en la mecánica cuántica no relativista donde la función de onda correspondiente a una partícula con spin se escribe como el producto tensorial de una función orbital (grupo de Heisenberg-Weyl ordinario) por un spinor (grupo de rotaciones). El estudio de las representaciones irreducibles de dicha álgebra es el punto de partida para el desarrollo formal de la teoría.

La representación asociada con la ecuación (1) discutida en *A*, corresponde a la elección

$$\sigma^{\mu\nu} = \tfrac{i}{2}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right].$$

En tal caso, el hamiltoniano escalar para spin 1/2, considerado implícitamente en (1), es $\hat{H} = \gamma^{\mu}, \hat{p}_{\mu}$. El análogo de la ecuación (14) conduce a la ecuación de movimiento de la variable dinámica $\hat{f}$ (cuadro de Heisenberg):

$$\frac{d\hat{f}}{ds} = -i\left[\hat{H}, \hat{f}\right], \quad (28)$$

la cual no es otra cosa que la derivada de Beck[17] que fue extensivamente utilizada en I, II y III. El cuadro de Shrödinger correspondiente es provisto por la parametrización (1). Dentro de este marco podemos reinterpretar el problema de la localización.

Teniendo en cuenta que

$$\left[\hat{H}, \hat{x}^{\mu}\right] \neq 0, \quad (29)$$

vemos que no es posible localizar al sistema caracterizado por la función de onda $\psi\left(x^{\mu}, s\right)$ para un valor definido de la masa[18] (recordar, por ejemplo, la ecuación (4)). En la formulación estándard del problema, uno debe renunciar o a la covariancia de la localización, donde las coordenadas del tri–vector posición se transformen adecuadamente ante transformaciones de Lorentz, o a la conmutatividad de las componentes del operador tri–posición[19]. En nuestro caso, consideramos un operador cuadri–posición, que transforma adecuadamente ante transformaciones de Lorentz, con componentes compatibles, tales como para definir un C.C.O.C., y libre de las objeciones acerca de la posibilidad de elevar la coordenada x_0 al rango de operador, pues en este caso no tenemos cota inferior para la energía del sistema[20]. La teoría estándar es también recuperada en este caso. Reduciendo los estados a aquellos compatibles con el vínculo masivo obtenemos el operador posición de Newton-Wigner[21] en el marco de una teoría *on shell* cuyo producto escalar es el de Bargmann-Wigner[13]. Retomaremos este punto en un futuro trabajo. Vemos entonces que, un marco adecuado para tratar el problema de la localización es provisto por una teoría de masa indefinida, además de las ventajas que ofrece a nivel interpretativo, a nivel de cálculo (por ej., la representación integral del propagador retardado de esta formulación conduce al propagador de Feynman de teoría de campos con la elección adecuada de los contornos de integración, la cuantificación vía integral de caminos puede ser realizada sin recurrir a métodos de cuantificación de teorías con vínculos) y ofrece también la posibilidad de abordar ciertos problemas olvidados por la teoría usual como, por ejemplo, la obtención de un espectro de masas para las partículas elementales, la relajación de algunas de las hipótesis que conducen a teoremas de imposibilidad (Coleman-Mandula, Haag, etc.[22]).

APÉNDICE

Diremos que un operador $\hat{A}$ es hermítico en el producto escalar (2) si es igual a su adjunto: $\hat{A} = \overline{\hat{A}}$, donde $\overline{\hat{A}}$ queda definido en la forma usual por:

$$\left\langle \phi \,|\, \overline{\hat{A}} \,|\, \psi \right\rangle = \left\langle \psi \,|\, \overline{\hat{A}} \,|\, \phi \right\rangle^{*}, \qquad \forall\ \phi,\ \psi \quad (\mathrm{A1})$$

Para los operadores que actúan en el espacio de spin (los cuales serán representados con letras griegas, en forma genérica α, β, ...) existe una relación sencilla entre la noción de adjunto que surge de la teoría de Dirac estándar correspondiente al producto escalar usual, que indicamos con $\alpha^{\dagger}$, y el $\bar{\alpha}$ definido en (A1)[23]:

$$\bar{\alpha} = \gamma^{0} \alpha^{\dagger} \gamma^{0} \tag{A2}$$

Usando (A2) y las conocidas propiedades para la operación †, o directamente de la definición (A1), se puede probar que

$$\begin{aligned} \overline{\alpha + \beta} &= \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \\ \overline{\alpha\beta} &= \bar{\beta}\bar{\alpha} \end{aligned} \tag{A3}$$

A partir de las propiedades anteriores y el álgebra de las γ's, se puede probar la hermiticidad de los siguientes operadores:

$$I, \gamma^{\mu}, \gamma^{5}, i\gamma^{5}\gamma^{\mu}, \sigma^{\mu\nu}.$$

Los operadores orbitales como $\hat{x}^{\mu}$ y $\hat{p}_{\mu}$ resultan hermíticos y, en general, el adjunto de una expresión función de ellos sigue reglas análogas a las de la teoría no relativista, por ejemplo,

$$\overline{\hat{L}^{\mu\nu}} = \hat{L}^{\mu\nu}.$$

REFERENCIAS

1. J. Aparicio *et al.* Anales AFA **2**, 81(1991); **3**, 46, 51 (1992); **4**, (1993). Estos trabajos serán llamados 1, 2, 3 y A, respectivamente, de aquí en más.
2. R. Feynman. Phys. Rev. **80**, 440 (1950); **84**, 108 (1951).
3. V. Fock. Physik Z. Sowjetunion **12**, 404 (1937).
4. E. Stückelberg. Helv. Phys. Acta **14**, 322 (1941); **15**, 23 (1942).
5. A. Kálnay. *The Localization Problem* en "Problems in the Foundations of Physics", ed. M. Bunge, (Springer-Verlag, 1971).
6. J. Fanchi. Found. Phys. **11**, 493 (1981).
7. J. Fanchi. Am. J. Phys **49**, 850 (1981).
8. A. Barut. Found. Phys. **18**, 95 (1988).
9. R. Feyman. *Negative probability* en "Quantum Implications: Essays in honour of D. Bohm". Ed. B. Hiley and F. Peat. (Routledge and Kogan Paul, 1987).
10. J. J. Johnson. Phys. Rev. **181**, 1755 (1969); **D3**, 1735 (1971).
11. En este trabajo adoptamos la noción de antipartícula como la de una partícula que viaja hacia atrás en el tiempo (interpretación de Stückelberg), la cual es compatible con una formulación segundo–cuantizada donde el estado de vacío corresponde a la ausencia de estados tanto de energía positiva como de energía negativa, en contraste con la versión segundo–cuantizada estándar en donde todos los estados de energía negativa están ocupados (interpretación de Dirac). Ver por ej., R. Feynman, Phys. Rev. **76**, 749 (1949).
12. Si consideramos el acoplamiento mínimo de la ecuación (4) con el campo electromagnético, reemplazando $\hat{p}_{\mu}$ por $\hat{p}_{\mu} - eA_{\mu}$, entonces se puede demostrar: $\phi_{m,\pi,c}(x^{\mu}) = \phi_{-m,-\pi,-c}(x^{\mu})$. Esta interpretación coincide con la propuesta por A. Barut, *Foundations of self-field Quantum electrodynamics* en "New Frontiers in Quantum Electrodynamics and Quantum Optics". Ed. A. Barut (Plenum Press, 1989).
13. V. Bargmann and E. Wigner. Proc. Roy. Soc. Sci. USA **34**, 211 (1946).
14. Los problemas de ordenamiento de operadores en la regla de Dirac, se presentan para funciones del tipo $x^{n} p^{m}$ con $n,m \geq 2$. Véase, por ej., E. García Alvarez and A. González, Am. J. Phys. **59**, 279 (1991).
15. H. Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover (1950).
16. I. Gel'fand, R. Minlos and Z. Shapiro. *Representation of the Rotation and Lorentz Groups and their applications.* (Pergamons Press 1963). Véase también, N. Doughty. *Electrodynamics and Relativistic wave equations: an introduction to tensors, spinors and Lagrangian fields*. (Addison-Wesley, 1988).
17. G. Beck. Rev. Facultade da Ciencias da Coimbra **10**, 66 (1942).
18. A. Broyles. Phys. Rev. **D1**, 979 (1970).
19. Ver por ej., T. Philips. Phys. Rev. **136**, B893 (1964), y la Ref. 5.

(20) W. Pauli. *Encycloppedia of Physics*. Vol. **5**,1. (Springer-Verlag, 1958). p. 60.

21. T. Newton and E. Wigner. Rev. Mod. Phys. **21**, 400 (1949).
22. M. Castagnino, F. Gaioli & E. García Alvarez. *Parametrized Quantum Gravity.* Preprint IAFE, 1993.
23. La introducción de esta noción de hermeticidad a través de la expresión (A2) es conocida en la literatura, aunque la misma se hace de una manera un tanto artificial. Véase, por ej. C. Itzykson and J. Zuber. *Quantum Field Theory.* (Mc Graw-Hill, 1980), p. 188.