FORMULACIÓN DE LA MECÁNICA CUÁNTICA RELATIVISTA PARAMETRIZADA CON UN TIEMPO PROPIO. III

J. P. Aparicio*, F. H. Gaioli*, E. T. García Alvarez*

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, (1428) Buenos Aires, Argentina.

Este trabajo es dedicado a reexaminar en forma crítica el problema de la localización para la partícula de spin 1/2 relativista en el marco de la Formulación de la Mecánica Cuántica Relativista parametrizada con un tiempo propio (MCRTP), discutida en trabajos anteriores. Analizamos la zitterbewegung en forma covariante mostrando que una generalización de la solución propuesta por Schrödinger al problema de la localización es en esencia la solución ofrecida por Bunge. Mostramos también que una transformación tipo Foldy-Wouthuysen conduce a una teoría de dos componentes equivalentes a la propuesta por Feynman y Gell-Mann.

I. INTRODUCCIÓN

En trabajos anteriores[1] hemos introducido el formalismo de la MCRTP. En *1*, *2*, y *3* el mismo fue discutido en forma heurística, a través de una derivación cuántica con respecto al tiempo propio originalmente propuesta por Beck[2], estableciendo la conexión con las teorías clásicas de spin. Una presentación de la estructura formal de la MCRTP como una teoría de masa indefinida y la interpretación de la misma fue dada en los trabajos **A** y **B**. En el último también sugerimos reinterpretar el problema de la localización en dicho marco, a partir del cuadrioperador posición x^{μ}.

En el marco de la MCRTP la ecuación de movimiento para dicho operador es la versión manifiestamente covariante de la ecuación de Breit[3]:

$$\frac{dx^{\mu}}{ds} = \gamma^{\mu}, \tag{1}$$

donde $\frac{d}{ds}$ es la derivada de Beck, que para una variable de Dirac A se lee:

$$\frac{dA}{ds} = -i\,[H, A], \tag{2}$$

que corresponde a la ecuación de Heisenberg en el marco de la MCRTP, siendo $H = \gamma^{\mu} p_{\mu}$ para el caso libre. Análogamente a lo que señalara Breit para el caso de la teoría de Dirac, el operador 4-velocidad (1), correspondiente a un operador 4-posición multiplicativo en la representación de Dirac, posee autovalores $\pm\, c$, lo cual, en principio, origina la dificultad de que la ecuación (1) sólo sería compatible con un sistema de masa nula[4]. Esto puede verse como uno de los aspectos del problema de la localización trasladado al marco de la MCRTP. En la versión estándar de la mecánica cuántica relativista tal problema ha sido estudiado desde diferentes puntos de vista[5]. Algunas de las posibles soluciones comienzan con la propuesta más antigua correspondiente al trabajo de Schrödinger[6], quien mostró que el movimiento de la partícula de Dirac, puede ser separado en un movimiento suave (compatible con el análogo clásico) y una parte altamente oscilante (zitterbewegung), posteriormente identificada por algunos autores con el mecanismo de creación de pares; hasta llegar a la solución ofrecida por Foldy y Wouthuysen[7], quienes encontraron una nueva representación en la cual el operador posición multiplicativo (el cual resultó ser el mismo que el hallado en el célebre trabajo de Newton y Wigner[8] conduce a ecuaciones de movimiento con análogo clásico. La generalización de estas alternativas al marco de la MCRTP será el contenido de este trabajo.

En *3*, vinculando la derivada de Beck con otra derivación alternativa propuesta por Fock[9], introdujimos el operador posición de Feynman-Bunge[10] y un conjunto de variables generalizadas, A_B, asociadas a las variables de Dirac A, definidas por:

$$A_B \equiv A + \frac{i}{2m}\frac{dA}{ds}, \tag{3}$$

* Becarios Universidad Nacional de Buenos Aires.

las cuales ofrecían una alternativa para sortear las dificultades señaladas en relación con la ecuación (1). Puede demostrarse que, sobre autoestados de la masa $\phi_m (H\phi_m = m\phi_m$, ecuación de Dirac):

$$\Gamma A \Gamma \phi_m = A_B \phi_m, \tag{4}$$

donde Γ es el pseudoproyector

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{H}{m}\right), \tag{5}$$

que vincula las soluciones de la ecuación de Dirac, ϕ_m, con las soluciones de la ecuación de segundo orden para spin 1/2, ϕ_{m^2}, $(H^2 \phi_{m^2} = m^2 \phi_{m^2})$:

$$\phi_m = \Gamma \phi_{m^2}. \tag{6}$$

En **A** hemos utilizado el proyector $\Lambda_\pm$ sobre el subespacio de masas positivas y negativas, definido por:

$$\Lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{H}{\sqrt{H^2}}\right). \tag{7}$$

El proyector Λ_+ es análogo al proyector definido en (5), donde se ha reemplazado m por el operador de masa $m_p \equiv \sqrt{H^2}$, puesto que la MCRTP es una teoría de masa indefinida y por lo tanto, no puede depender de un valor particular de la misma continuando con dicha analogía. También definiremos un nuevo conjunto de variables generalizadas, proyectando las variables de Dirac con Λ_+, según:

$$\Lambda_+ = \Lambda_+ \, A \, \Lambda_+, \tag{8}$$

que son la extensión natural de las variables de Bunge en la MCRTP.

En la sección siguiente mostraremos que el operador Λ_+ es, en el subespacio de masas positivas, esencialmente la generalización covariante del operador propuesto por Schrödinger[6], que no experimenta movimiento de zitterbewegung y posee ecuaciones de movimiento con análogo clásico. En la sección III mostraremos que existe una transformación de similaridad $A' = UAU^{-1}$, que convierte el proyector Λ_+ en el operador que proyecta sobre los estados de quiralidad positiva y conduce naturalmente a la teoría de dos componentes de Feynman-Gell-Mann[11].

II. ZITTERBEWEGUNG COVARIANTE

La zitterbewegung covariante fue originalmente discutida por Bunge y Kálnay[12] en el marco de una teoría de masa definida. El tema fue revivido recientemente por Barut y Thacker[13] en relación a sus álgebras internas $SO(4, 2)$ y $SO(3, 2)$. Veamos una reformulación de dicho tema, en el marco de la MCRTP.

A. MOVIMIENTO DE LA POSICIÓN

En lo que sigue usaremos el método de Dirac para integrar la ecuación (1)[14]. Derivando la ecuación (1) anterior obtenemos:

$$\frac{d\gamma^\mu}{ds} 2i\gamma^\mu H - 2ip^\mu, \tag{9}$$

y derivando nuevamente obtenemos una ecuación diferencial en la cuadri-aceleración:

$$\frac{d\dot{\gamma}^\mu}{ds} 2i\dot{\gamma}^\mu H, \tag{10}$$

donde el punto indica derivada con respecto a s. La ecuación (10) es fácilmente integrable:

$$\frac{d\gamma^\mu}{ds} = 2i\left[\gamma^\mu(0)H - 2ip^\mu\right] e^{2iHs}. \tag{11}$$

Integrando (11) nuevamente obtenemos:

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \left[\gamma^\mu(0) - \frac{p^\mu}{H}\right] e^{2iHs} + \frac{p^\mu}{H}, \tag{12}$$

donde el último término se ha sumado para satisfacer la condición inicial $\gamma^\mu(0)$ de acuerdo con la ecuación (1). Finalmente, integrando (12) tenemos:

$$x^\mu(s) = X_S^\mu(s) + X_z^\mu(s), \tag{13}$$

$$X_S^{\mu}(s)=x^{\mu}(0)-\left[\frac{p^{\mu}}{H}-\gamma^{\mu}(0)\right]\frac{i}{2H}+\frac{p^{\mu}}{H}s, \quad (14)$$

$$X_z^{\mu}(s)=\left[\frac{p^{\mu}}{H}-\gamma^{\mu}(0)\right]\frac{i}{2H}e^{2iHs}, \quad (15)$$

donde en X_S^{μ} y X_z^{μ} hemos reagrupado la generalización covariante del operador de centro de masa de Schrödinger de movimiento suave y la parte que experimenta un movimiento altamente oscilatorio (zitterbewegung). Ahora veamos que la expresión (14) puede ser reescrita como:

$$X_S^{\mu}(s)=\Lambda_+ x^{\mu}\Lambda_+ + \Lambda_- x^{\mu}\Lambda_-, \quad (16)$$

que, conmutando los proyectores, puede ponerse en la forma:

$$X_S^{\mu}=x^{\mu}+\frac{1}{2}\left[\frac{H}{m_p},x^{\mu}\right]\frac{H}{m_p}. \quad (17)$$

En efecto, es fácil verificar que la velocidad obtenida a partir de (16) es la misma que se deriva de (14):

$$\frac{dX_S^{\mu}}{ds}=\frac{p^{\mu}}{H}. \quad (18)$$

Además, puede demostrarse que las condiciones iniciales obtenidas a partir de las dos ecuaciones también coinciden. (Para realizar tales demostraciones resultan útiles las siguientes propiedades:

$$\Lambda_{\pm}\gamma^{\mu}\Lambda_{\pm}=\pm\frac{p^{\mu}}{m_p}\Lambda_{\pm}, \qquad \frac{d\Lambda_{\pm}}{ds}=0). \quad (19)$$

B. MOVIMIENTO DEL SPIN

Siguiendo un procedimiento análogo al de la sección II.*A*, podemos integrar la ecuación de movimiento del spin:

$$\frac{d\sigma^{\mu\nu}}{ds}=p^{\mu}\gamma^{\nu}-p^{\nu}\gamma^{\mu}. \quad (20)$$

Sin embargo, no es necesario derivar esta ecuación nuevamente si sustituímos γ^{μ} por su expresión (12), donde el último sumando no contribuye debido a la antisimetría en los índices μ y ν. Integrando dicha ecuación, tenemos:

$$\sigma^{\mu\nu}=\sum\nolimits_S^{\mu\nu}+\sum\nolimits_z^{\mu\nu}, \quad (21)$$

$$\sum\nolimits_S^{\mu\nu}(s)=\sigma^{\mu\nu}(0)-\left[p^{\mu}\gamma^{\nu}(0)-p^{\nu}\gamma^{\mu}(0)\right]\frac{1}{2iH}, \quad (22)$$

$$\sum\nolimits_z^{\mu\nu}(s)=\left[p^{\mu}\gamma^{\nu}(0)-p^{\nu}\gamma^{\mu}(0)\right]\frac{1}{2iH}e^{2iHs}, \quad (23)$$

donde nuevamente hemos hecho la identificación de la variable de Schrödinger con la constante de movimiento:

$$\frac{d\sum_S^{\mu\nu}}{ds}=0, \quad (24)$$

y de $\sum_z^{\mu\nu}$ con la parte altamente oscilatoria. También en este caso, $\sum_S^{\mu\nu}$ puede reescribirse como:

$$\sum\nolimits_S^{\mu\nu}=\Lambda_+\sigma^{\mu\nu}\Lambda_+ + \Lambda_-\sigma^{\mu\nu}\Lambda_-, \quad (25)$$

o alternativamente como:

$$\sum\nolimits_S^{\mu\nu}=\sigma^{\mu\nu}+\left(p^{\mu}\gamma^{\nu}-p^{\nu}\gamma^{\mu}\right)\frac{1}{2H}, \quad (26)$$

la cual tiene una total analogía con el operador de spin de Hilgevoord-Wouthuysen[15] para el caso de masa definida, el cual coincide con la variable generalizada (ver ecuación (3)) correspondiente al spin de Dirac[12].

Veremos en la siguiente sección que los operadores $\Lambda_{\pm}$, los cuales juegan un papel relevante en la zitterbewegung covariante, son también esenciales para obtener una teoría de dos componentes.

III. TRANSFORMACIÓN DE FOLDY-WOUTHUYSEN COVARIANTE

Observando la analogía existente entre la MCRTP y la teoría de Dirac estándar podemos generalizar el procedimiento que conduce a una teoría de dos componentes. Por ejemplo, el hamiltoniano de la teoría de Dirac guarda cierta semejanza con el hamiltoniano escalar de la MCRTP si a éste último le agregamos además un término de masa pseudo-escalar[16] (caso libre):

$$H_D=\vec{\alpha}.\vec{p}+\beta m \rightarrow H=\gamma^{\mu} p_{\mu}+i\gamma^5 M. \quad (27)$$

En efecto, la correspondencia sugerida es: $\vec{p}\rightarrow p_{\mu}$, $\vec{\alpha}\rightarrow\gamma^{\mu}$, $\beta\rightarrow i\gamma^5$ y $m\rightarrow M$. Prosiguiendo con estas analogías, podemos extrapolar una posible versión covariante de la transformación de Fody-Wouthuysen[7] (FW):

$$U=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E_P}{E_P+m}}\left(1+\beta\frac{H_D}{E_P}\right), \quad (28)$$

donde $E_P=\sqrt{H_D^2}=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$. Si generalizáramos esta ecuación al caso covariante, deberíamos identificar a E_P con $m_P=\sqrt{p_{\mu}p^{\mu}+M^2}$. Sin embargo, el término de masa agregado al hamiltoniano escalar para completar las analogías, no es hermítico en el producto escalar de la MCRTP[17]. En consecuencia, de aquí en más nos restringiremos al caso $M = 0$. La transformación (28) covariante que nos interesa, se escribe en tal caso como:

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+i\gamma^5\frac{H}{m_p}\right). \quad (29)$$

Esta transformación, a diferencia del caso estándar, no es unitaria[18]. Sin embargo, en la nueva representación el hamiltoniano sólo contiene términos que conmutan con $i\gamma^5$ (términos quirales),

$$H'\equiv UHU^{-1}=i\gamma^5 m_P, \quad (30)$$

del mismo modo que, en el caso estándar, los términos impares son removidos[19].

En presencia de interacción electromagnética, los resultados anteriores se generalizan fácilmente, reemplazando p_{μ} por $\pi_{\mu}=p_{\mu}-eA_{\mu}$. En consecuencia,

$$m_P=\sqrt{\pi_{\mu}\pi^{\mu}-\frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}$$

La transformación U que resulta en este caso, es el análogo de la transformación no iterativa encontrada por Case[20] para el caso estándar de una partícula en presencia de un campo magnético externo estático.

Análogamente a lo que sucede con el proyector sobre energías positivas en la teoría de Dirac estándar, el proyector sobre estados de masa positiva (ver la ecuación (7)), es transformado en la nueva representación, en el operador (no hermítico, $\Lambda_+' \neq \Lambda_+'^{\dagger}$) que proyecta sobre estados de quiralidad positiva:

$$\Lambda_+'\equiv U\Lambda_+U^{-1}=\frac{1}{2}\left(1+i\gamma^5\right). \quad (31)$$

Si restringimos la teoría a estados de masa positiva (resultados similares se obtienen trabajando con Λ_-), lo que es equivalente a tomar estados de quirilidad positiva en la nueva representación:

$$\phi_+'\equiv U\phi_+=\frac{1}{2}\left(1+i\gamma^5\right)\phi', \quad (32)$$

entonces, la ecuación de autovalores para autofunciones de masa positiva, $H\phi_{+,m}=m\phi_{+,m}$, que en la nueva representación se lee:

$$m_P\phi_+'=m\phi_+', \quad (33)$$

es equivalente a la ecuación de Feynman y Gell-Mann[11]:

$$m_p^2\phi_+'=\left[\pi_{\mu}\pi^{\mu}-\frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\phi_+'=m^2\phi_+'. \quad (34)$$

El punto de partida considerado por Feynman-Gell-Mann para obtener la ecuación anterior consitió en elevar al cuadrado la ecuación de Dirac en presencia de campos electromagnéticos, es decir, $H^2\phi = m^2\phi$. Notemos que, sólo en este caso particular, el cual es análogo a lo que sucede en el caso estándar de una partícula en un campo magnético estático[21], al elevar al cuadrado el hamiltoniano, los términos no quirales ya son removidos, permitiendo así obtener en forma inmediata una teoría de dos componentes. En un caso más general, esto ya no sucede (en el caso estándar está dado por la presencia de un campo eléctrico, mientras que en nuestro caso, sólo aparecería si consideráramos una extensión del electromagnetismo compatible con una transformación de gauge $e^{i\alpha(x^{\mu},s)}$ en el marco de la MCRTP[22]). Más aún, en nuestro desarrollo, hemos visto claramente que la teoría de dos componentes correspondiente a la ecuación (34), es el resultado de un cambio de representación (aunque no unitarira[23]) que, en esencia, consiste en restringir los estados a aquéllos de masa positiva, lo cual no resulta obvio en la presentación original de Feynman-Gell-Mann.

REFERENCIAS

1. J. Aparicio *et. al.*, ANALES AFA **2**, 81 (1991); **3**, 46, 51 (1992); **4** (1993); F. Gaioli y E. García Alvarez. *Formulación de la Mecánica Cuántica Relativista parametrizada con un tiempo propio. II.* Enviado a ANALES AFA 5. Estos trabajos serán llamados **1**, **2**, **3**, **A** y **B**, respectivamente.
2. G. Beck. Rev.Fac. da Ciencias da Coimbra **10**, 66 (1942).
3. G. Breit. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **14**, 553 (1928); Phys. Rev. **37**, 90 (1931).
4. Es importante señalar que esta dificultad aparece porque la ecuación de Dirac describe la teoría de una carga más que la teoría de una partícula.
5. Para una exhaustiva revisión de las diferentes propuestas al problema de localización hasta la década del '70, ver, por ej., A. Kálnay, *The Localization Problem* en "Problems in Foundations of Physics", ed. M. Bunge, (Springer-Verlag, 1971).
6. E. Schrödinger, Sitzungsb. Preuss. Akad. Wiss. Berlin **24**, 418 (1930); **3**, 1 (1931).
7. L. Foldy and S. Wouthuysen. Phys. Rev. **78**, 29 (1950).
8. T. Newton and E. Wigner. Rev. Mod. Phys. **21**, 400 (1949).
9. V. Fock. Physik Z. Sowjetunion **12**, 404 (1937).
10. R. Feynman. *Quantum Electrodynamics*, (Cal. Tech.Lectures, 1953), Benjamin, 1961), lec. 11; M. Bunge, Nuovo Cimento **1**, 977 (1955).
11. R. Feynman and M. Gell-Mann. Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
12. M. Bunge and A. Kálnay. Prog. Theor. Phys. **42**, 1445 (1969).
13. A. Barut and W. Thacker. Phys. Rev. **D31**, 1386 (1985).
14. Creemos oportuno señalar aquí algunas erratas de nuestro trabajo anterior A que pueden llevar a confusión. La integración de la ecuación (1), ecuación (3.8) en A fue copiada incorrectamente (como es evidente de la discusión efectuada en la sección II), aunque el resultado final (3.9) de **A** sigue siendo válido. Sin embargo, en esta ecuación, al igual que en las ecuaciones (3.10) y (3.11) de **A**, un signo ± ha sido omitido (comparar con la ecuación (19)). Por lo tanto, el $\pm s$ que figura en el último miembro de (3.11), debe ser interpretado como $\epsilon = sg(p_0) \times sg(m)$, según la notación de **B**. Por último señalaremos que los estados $\phi_{\pm,m}$ definidos en (3.10) y (3.11) de **A**, no son estrictamente estados de masa definida, sino estados cuasiclásicos centrados en un valor de p_μ correspondientes a un valor $m \approx \sqrt{p_\mu p^\mu}$. Más detalles pueden verse en J. Aparicio, F. Gaioli y E. García Alvarez, *Interpretation of the proper time in Relativistic Quantum Mechanics*, enviado a Phys. Lett. A.
15. J. Hilgevoord and S. Wouthuysen. Nucl. Phys. **40**, 1 (1963).
16. D. Leiter and G. Szamosi. Lett. Nuovo Cimento **5**, 814 (1972).
17. La noción de hermiticidad de un operador A en la MCRTP, $\overline{A} = A$, es precisada en el apéndice del trabajo denominado **B**.
18. La pérdida de unitariedad de la transformación U no fue advertida en el trabajo de J. Jonhson and K. Chang. Phys. Rev. **D10**, 2421 (1974).
19. Una exposición clara de la transformación FW puede verse en J. Björken and S. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, (Mc Graw-Hill, 1964).
20. K. Case. Phys. Rev. **95**, 1323 (1954); H. Mendlowitz and K. Case. Phys. Rev. **97**, 33 (1955).
21. J. Aparicio *et al.*, *Positive energy states for the relativistic spin 1/2 particle*. Enviado a Phys. Rev. A.
22. L. Horwitz. Found. Phys. **14**, 1027 (1984); A. Kyprianidis. Phys. Rep. **155**, 2 (1987).
23. Aunque en otro contexto, el problema de la no unitariedad entre las formulaciones de primer y segundo orden de la ecuación de Dirac fue recientemente remarcado por J. Edelstein y R. Montemayor, *Comentarios sobre un formalismo de segundo orden para campos de espin 1/2*. Enviado a ANALES AFA 4. Agradecemos a J. Edelstein el habernos facilitado una copia de su trabajo antes de ser remitido para su publicación.