ANISOTROPÍA Y POLARIZACIÓN DE LA RADIACIÓN DE FONDO EN COSMOLOGÍAS INFLACIONARIAS

D. D. Harari y M. Zaldarriaga
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria - Pabellón 1 (1428) Buenos Aires, Argentina.

La radiación cósmica de fondo podría estar parcialmente polarizada debido al scattering de Thompson con electrones libres antes del desacople de la radiación con la materia. En este trabajo se resuelve la ecuación de transporte para los parámetros de Stokes, que caracterizan el estado de polarización de la radiación de fondo, en presencia de perturbaciones escalares y tensoriales en la métrica del espacio tiempo. Estas perturbaciones en la métrica fueron normalizadas utilizando las recientes mediciones del satélite COBE.

The microwave background radiation is expected to be partially polarized due to Thompson scattering with free electrons prior to decoupling. We solve the radiative transfer equation for the photon distribution function and calculate the induced polarization, normalizing the amplitude of the scalar and tensor metric fluctuations using the quadrupole anisotropy recently meassured by COBE satellite.

Recientemente el satélite COBE detectó fluctuaciones en la temperatura de la radiación cósmica de fondo[1]. Estas fluctuaciones serían el producto de perturbaciones en la métrica del espacio tiempo, que a través del efecto Sachs Wolfe inducen un corrimiento al rojo diferente a los fotones provenientes de distintas direcciones. Las fluctuaciones en la métrica pueden ser de dos tipos, escalares (debido a fluctuaciones en la densidad de energía o tensoriales (ondas gravitatorias). Los modelos inflacionarios predicen la existencia de ambos tipos de perturbaciones, como así también la relación entre sus amplitudes, por lo tanto, una determinación de la contribución relativa de ambos efectos a la anisotropía detectada por COBE podría proveer una evidencia muy fuerte en favor de los modelos inflacionarios[2-3].

Este diferente corrimiento al rojo para los fotones que viajan en distintas direcciones también originan por scattering de Thompson con electrones libres antes del momento en que la radiación se desacopla con la materia, puede producir un cierto grado de polarización en la radiación de fondo[4-5].

En este trabajo, utilizando el formalismo desarrollado por Polnarev[6], se calcula el grado de polarización lineal que inducen fluctuaciones escalares y tensoriales gaussianas con un espectro de potencias. Para ello, se resuelve la ecuación de transporte para los parámetros de Stokes, que caracterizan el estado de polarización de la radiación con una aproximación válida para observaciones a gran escala angular (> 1°). La amplitud de las perturbaciones se normalizó usando las mediciones del COBE.

La métrica del espacio tiempo viene dada por:

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-d\tau^2 + \left(\delta_{ij} + h_{ij}\right) dx^i dx^j\right] \qquad (1)$$

donde τ es el tiempo conforme, relacionado con t por

$$d\tau = dt/a(t),\ \left|h_{ij}\right| << 1,\ \text{ y } i,j = 1, 2, 3.$$

La función de distribución para los fotones está representada por un vector $\hat{\boldsymbol{n}}\,(\nu,\theta,\phi) = \left(I_l, I_r, U, V\right)$, cuyas componentes son los parámetros de Stokes, θ,ϕ indican la dirección de propagación del haz. I_l, I_r son las intensidades en dos direcciones ortogonales definidas por los versores $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ de coordenadas esféricas. La ecuación de Boltzman para esta distribución es:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + e^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\hat{\boldsymbol{n}} = -\frac{d\nu}{d\tau}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{n}}}{\partial \nu} - \sigma_T N_e a\left[\hat{\boldsymbol{n}} - \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} P(\mu,\phi,\mu',\phi')\hat{\boldsymbol{n}}\, d\mu' d\phi'\right] \qquad (2)$$

donde $P(\mu,\phi,\mu',\phi')$ es una matriz de 4 x 4 que caracteriza el efecto de scattering de Thompson sobre la polarización, $\mu = \text{arc}\, cos\theta$, e^i es un versor en la dirección (θ,ϕ), σ_T es la sección eficaz total para el scattering de Thompson y N_e es la densidad de electrones libres. El efecto de las perturbaciones en la métrica sobre la frecuencia de los fotones está dado por la fórmula de Sachs–Wolfe, que en el gauge sincrónico es:

$$\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{ij}}{\partial \tau} e^i e^j \qquad (3)$$

Para describir las perturbaciones en la métrica de origen escalar usamos la variable ζ, definida por Bardeen[8], en función de la cual las fluctuaciones en la métrica quedan:

$$h_{ij}(\vec{x},\tau) = -\frac{1}{15}\tau^2 \frac{\partial^2\zeta(\vec{x})}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{5}\zeta(\vec{x})\,\delta_{ij}\,. \quad (4)$$

ζ coincide con las fluctuaciones en la densidad de energía para longitudes de onda que están dentro del horizonte. Descomponemos ζ en ondas planas, $\zeta(\vec{x}) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\,\zeta(\vec{k})$, donde $\zeta(\vec{k})$ es una variable aleatoria gaussiana con valor de espectación $\langle\zeta(\vec{k})\,\zeta(\vec{q})\rangle = P_\zeta\;(k)\,\delta(\vec{k}-\vec{q})/4\pi k^3$. P_ζ da el espectro de fluctuaciones escalares, que tomaremos

$$P_\zeta(k) = P_\zeta\; k^{n-1} \quad (5)$$

donde P_ζ es una constante, y el espectro es invariante de escala (todas las longitudes de onda tienen la misma amplitud al cruzar el horizonte) si $n = 1$ (n es el índice espectral). Estas perturbaciones tienen su origen en fluctuaciones cuánticas de los campos durante la etapa inflacionaria, por eso deben ser tratadas clásicamente como variables aleatorias.

Análogamente, para las fluctuaciones tensoriales, durante la etapa dominada por la materia,

$$h_{ij}(\vec{x},\tau) = \sum_\lambda \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\; h_\lambda(\vec{k})\;\varepsilon_{ij}\,(\lambda,\vec{k})\left(\frac{3j_1(k\tau)}{k\tau}\right) \quad (6)$$

donde $\lambda = 1, 2$ indica la polarización de la onda gravitatoria caracterizada por el tensor ε_{ij}, j_1 es la función de Bessel esférica, y h_λ variables aleatorias con valor de espectación $\langle h_\lambda(\vec{k},\tau)h_{\lambda'}(\vec{q},\tau)\rangle = P_h(k)$ $\delta(\vec{k}-\vec{q})\delta_{\lambda\lambda'}/4\pi k^3$. Consideramos un espectro de la forma:

$$P_h(k) = P_h k^{n-1}, \quad (7)$$

que es invariante de escala si $n = 1$.

Si consideramos un modo escalar o tensorial de vector de onda $\vec{k}$ en la dirección del eje z, la fórmula de Sachs–Wolfe puede escribirse

$$\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{d\tau} = F_S\mu^2\;;\;\; \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{d\tau} = F_T\left(1-\mu^2\right)\,\cos\,(2\phi)\,. \quad (8)$$

donde

$$F_S \equiv -\tau\,\zeta\,(k)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}k^2/15$$

y

$$F_T \equiv \frac{1}{2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}h_\lambda(\vec{k})\frac{d}{d\tau}\frac{3j_1(k\tau)}{k\tau}.$$

La cantidad que interesa calcular es el grado de polarización lineal, definido en función de los parámetros de Stokes como $P = \sqrt{Q^2+U^2}/I$, con $I = I_l + I_r$, $Q = I_l - I_r$. Después de resolver la ecuación de Bolzmann puede verse que el grado de polarización inducido por un modo escalar viene dado por

$$P_S^2 \approx \left[0.17\Delta\tau_d\,\left|F_S(\tau_d)\right|\,\right]^2\left(1-\mu^2\right)^2 \quad (9)$$

τ_d es el momento en que se produce el desacople de la radiación con la materia y $\Delta\tau_d$ el tiempo que dura este proceso. Para el caso tensorial puede encontrarse una expresión análoga

$$P_T^2 \approx \left[0.17\Delta\tau_d\left|F_T(\tau_d)\right|\right]^2\left[\left(1+\mu^2\right)^2 + 4\mu^2\right] \quad (10)$$

donde ya hemos sumado sobre las dos polarizaciones para la onda gravitatoria.

En ambos casos la polarización inducida es proporcional a $F_T(\tau_d)\,\Delta\tau_d$, con la F apropiada. Esto tiene una explicación intuitiva sencilla. F da una medida de la diferente velocidad con que se corren al rojo fotones que viajan en las distintas direcciones. Esta anisotropía en el corrimiento al rojo se traduce en un diferente número de fotones viajando en las distintas direcciones, que es lo que produce una polarización neta después de un scattering de Thompson. Sin embargo, esta polarización sólo puede producirse durante un período $\Delta\tau_d$ alrededor del desacople de la radiación con la materia ya que la anisotropía en la función de distribución de los fotones producida antes del desacople es borrada por los sucesivos choques. Por otro lado, después del desacople, la radiación deja de interactuar con la materia y entonces no se puede producir más polarización por scattering de Thompson.

Resta ahora, para calcular el valor cuadrático medio del grado de polarización, superponer las contribuciones de las distintas longitudes de onda para las perturbaciones escalares y tensoriales, teniendo en cuenta su naturaleza estadística. La polarización inducida por modos escalares y tensoriales queda respectivamente:

$$\left\langle P^2 \right\rangle_S = \frac{8}{15} \int_0^{k_{max}} \frac{dk}{k} \left(P_\zeta \, k^{n-1} \right) \left[0.17 \Delta\tau_d \frac{k^2 \tau_d}{15} \right]^2$$

(11)

$$\left\langle P^2 \right\rangle_T = \frac{4}{5} \int_0^{k_{max}} \frac{dk}{k} \left(P_h \, k^{n-1} \right) \left[0.17 \Delta\tau_d \frac{d}{d\tau} \left(\frac{3 j_1(k\tau)}{k\tau} \right) \Bigg|_{\tau_d} \right]^2$$

Hemos introducido un *cutt-off*, k_{max}, determinado por la mínima longitud de onda a la que es sensible un determinado experimento.

El grado de polarización total será la suma de las contribuciones escalares y tensoriales, teniendo en cuenta su independencia estadística:

$$\sqrt{\left\langle P^2 \right\rangle} = \sqrt{\left\langle P^2 \right\rangle_S + \left\langle P^2 \right\rangle_T} \qquad (12)$$

Si suponemos que las fluctuaciones escalares y tensoriales se originaron durante un período de inflación de potencias, las amplitudes de los espectros pueden ser obtenidas a partir del valor del cuadrupolo para las fluctuaciones en la temperatura medido por el COBE $\left(\sqrt{\left\langle a_2^2 \right\rangle} \right)$ y el índice espectral, n. Obtenemos entonces para el grado de polarización:

$$P \approx 1.2 \times 10^{-7} \left(\frac{\Delta\tau_d}{3 \times 10^{-3}} \right) \left(\frac{k_{max}}{50} \right)^2 \left(\frac{\tau_d}{3 \times 10^{-2}} \right) \left(\frac{\sqrt{\left\langle a_2^2 \right\rangle}}{2 \times 10^{-5}} \right) C\left(n, k_{max}\right) \qquad (13)$$

C es una función de n, y k_{max} que tiene en cuenta las contribuciones relativas de los modos escalares y tensoriales fue normalizada para valer 1 cuando el índice espectral es 1, independientemente del k_{max}. Desafortunadamente no tiene una expresión analítica sencilla.

En la Fig. 1 se muestra la polarización total,

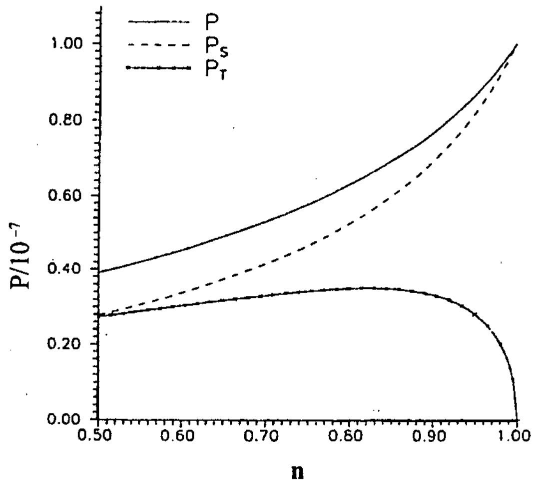

Fig. 1: Polarización rms total de la radiación cósmica de fondo a gran escala angular ($\approx 7°$) $P = \sqrt{P_T^2 + P_S^2}$ y contribuciones escalares y tensoriales P_S y P_T, como función del índice espectral n, para un modelo de inflación de potencias sin reionización.

para un valor de k_{max} = 50 que corresponde (con nuestra normalización) a una escala angular de observación $\theta \approx 7°$, para valores de n entre 0.5 y 1, consistentes con las mediciones del COBE. También se muestran las contribuciones escalares y tensoriales. El valor predicho es más de dos órdenes de magnitud menor que la actual cota experimental, $P < 6 \times 10^{-5}$, obtenida con una antena de apertura 7° para una frecuencia de 33 GHz. Es interesante notar que la dependencia de la polarización con n se debe principalmente a que ésta es producida durante el desacople, es decir para un corrimiento al rojo $z \approx 1100$, por lo tanto las longitudes de onda relevantes son las que tenían más amplitud en ese momento, es decir, longitudes de ondas más chicas que las relevantes para la anisotropía. De la forma del espectro, puede verse entonces, que estas longitudes de onda tienen menor amplitud a medida que n se aparta de 1.

Una gran cantidad de modelos inflacionarios predicen una relación entre las contribuciones escalares y tensoriales a la anisotropía y el índice espectral n. Hemos mostrado que también existe una relación entre la polarización y n, aunque la dependencia con el índice espectral es pequeña como para que mediciones de la polarización puedan verificar esta predicción con precisión. Nuestras conclusiones son similares a las obtenidas por Crittenden, Davis y Steinhardt, que en un preprint reciente tratan este tema de manera numérica[7].

Otro hecho interesante es que la dependencia de la polarización con los distintos parámetros de los modelos cosmológicos como por ejemplo Ω, Ω_b, H_o, es sólo a través de τ_d y $\Delta\tau_d$, que son muy poco sensibles al modelo.

REFERENCIAS

1. G. F. Smoot *et al.* Astrophys. Jour. **396**, L1, (1992).
2. R. L. Davis *et al.* Phys. Rev. Lett. **69**, 1856 (1992).
3. F. Lucchin, S. Matarrese and S. Mollerach. Ap. J., **401**, L49 (1992).
4. M. Rees. Astrophys. Jour. **153**, L1 (1968); G. P. Nanos. Astrophys. Jour. **232**, 341 (1979); J. Negroponte and J. Silk. Phys. Rev. Lett. **44**, 1433 (1980).
5. M. Basko and A. Polnarev. Sov. Astr. **24**, 3 (1979).
6. A. Polnarev. Sov. Astr. **29**, 607 (1985).
7. R. Crittenden, R. L. Davis and P. J. Steinhardt. "*Polarization of the microwave background due to primordial gravitational waves*". University of Pennsylvania preprint UPR-0575T (astro-ph/9306027), (1993).
8. J. Bardeen. Phys. Rev. **D22**, 1882 (1985).