EVOLUCIÓN IRREVERSIBLE EN COSMOLOGÍA CUÁNTICA

M. Castagnino [1,2], F. Gaioli [2] y D. Sforza [1]

[1] *Instituto de Astronomía y Física del Espacio Casilla de Correo 67, Sucursal 28, (1428) Buenos Aires, Argentina.*

[2] *Departamento de Físicas Facultad de Ciencias Ezactas y Naturales de La Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, (1428) Buenos Aires, Argentina.*

Se estudia la relación entre las flechas del tiempo termodinámica y cosmológica en el marco de la Cosmología Cuántica. En el contexto de una formulación apropiada de la Cosmología Cuántica, se obtiene una base de autovectores generalizados del Hamiltoniano. Con la aplicación de métodos matemáticos adecuados, se muestra cómo surge una evolución naturalmente irreversible, que es una consecuencia de una inestabilidad intrínseca e independiente de las condiciones iniciales. Para confirmar el carácter disipativo de la evolución, se construye un funcional de Lyapunov a partir de los estados inestables del Hamiltoniano.

The relationship between the thermodynamics and the cosmological arrows of time is studied in the framework of Quantum Cosmology. In the context of an appropriated formulation of Quantum Cosmology, a generalized eigenbasis of the Hamiltonian is obtained. In this approach, an irreversible evolution of the system naturally arises which is a consequence of an intrinsic instability independently of the initial conditions. To confirm the "dissipative" character of the evolution, a Lyapunov funtional is constructed from the unstable states of the Hamiltonian.

En la naturaleza existe una variedad de fenómenos que exhiben una clara asimetría entre el pasado y el futuro. Estos aparecen en diversos campos de la física definiendo "flechas del tiempo". Por *flecha del tiempo* entendemos una "estructura" que posee una relación de orden y define la noción de pasado y futuro. En el marco de este trabajo las más importantes son:

La flecha del tiempo termodinámica: la entropía de un sistema aislado jamás decrece. Esto define una dirección en el tiempo, en la cual la entropía crece (tomando el valor máximo en el estado de equilibrio).

La flecha del tiempo cosmológica: la dirección del tiempo en la cual el universo se expande.

El "surgimiento" de la irreversibilidad en los procesos físicos y la "flecha del tiempo" asociada es usualmente interpretada como el resultado de un promedio estadístico (o granulado grueso[1]). Es decir, no son requeridos por un aspecto objetivo del fenómeno físico, sino simplemente, como una forma de dar cuenta de nuestra ignorancia (o desinterés) del estado dinámico exacto del sistema.

Este método de granulado grueso no es exacto y además es arbitrario. No es exacto, porque la irreversibilidad surge como consecuencia de aproximaciones ineludibles. Es arbitrario, pues no existe una regla general que defina el granulado grueso (criterio de *relevancia*). Además, en cierto modo, son necesarias condiciones iniciales particulares (aunque más no sea por simplicidad de cálculo).

Existe una postura alternativa, que corresponde a la denominada escuela de Bruselas[2], que podemos resumir en la siguiente frase: "La irreversibilidad no puede *nacer* en el seno de una realidad reversible".

Este punto de vista, supone que el comportamiento irreversible está presente en el nivel más profundo de la física, el nivel cuántico. En sus fundamentos de la Mecánica Cuántica, J. von Newmann[3] hace notar que la evolución temporal dada por la ecuación de Schrödinger "no reproduce una de las propiedades más importantes e interesantes del mundo real, es decir su irreversibilidad, la diferencia fundamental entre las direcciones del tiempo, futuro y pasado". La flecha del tiempo, según von Newmann, emerge a partir del acto irreversible de medición, es decir, con el colapso de la función de onda. Como consecuencia de esto, la irreversibilidad no es una propiedad del mundo fenomenológico, sino una característica subjetiva de la percepción humana del sistema. En otras palabras: "El mundo, sin nuestra presencia, sería determinista y reversible".

Sin embargo, en la Mecánica Cuántica podemos hallar un comportamiento irreversible sustancial, independiente del acto de observación. A modo de ejemplo, podemos citar uno de los modelos más estudiados en la literatura de sistemas inestables: el modelo de Friedrichs[4]. El mismo describe la interacción entre un oscilador y un baño de osciladores acoplados linealmente al primero. Este sistema presenta estados inestables, que decaen exponencialmente en el tiempo.

Al tratar el tema de la asimetría temporal en Cosmología Cuántica, enfrentamos un problema esencial: el tiempo ha "desaparecido" del formalismo. A pesar de que, por diversas razones, todo intento de "recuperar" el tiempo en Gravedad Cuántica se ha visto frustrado, podemos utilizar algún parámetro (aunque no esté libre de defectos) con características apropiadas para la descripción de la evolución del sistema. El parámetro que utilizaremos con tal fin es *el tiempo probabilístico* [5], y nos permitirá aplicar nuestra estrategia al problema de la irreversibilidad.

Consideraremos un modelo de Universo con la inclusión de campos de materia. El mismo ha sido utilizado en diversos trabajos[6]. Por simplicidad, nos limitaremos al tipo de materia más simple, que puede representarse por un campo escalar real. En este caso, la acción de Einstein-Hilbert toma la forma

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}N\left\{\frac{m_p^2}{12}R-\frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi+\xi R\Phi^2+V(\Phi)\right]\right\} \tag{1}$$

donde Φ es el campo escalar, que autointeractúa con un potencial $V(\Phi)$.

Asumiremos que la métrica espacial permanece en la clase de espacios de Friedmann-Robertson-Walker cerrados. Bajo esta hipótesis, sólo sería posible satisfacer las ecuaciones de Einstein si el campo fuera igualmente homogéneo. Para obtener un modelo no trivial que contuviese campos de materia no homogéneos, sería necesario introducir también grados de libertad correspondientes a perturbaciones de la métrica. En primera aproximación, sin embargo, estas perturbaciones pueden describirse en términos de gravitones, cuyo efecto es cualitativamente similar al de las otras formas de materia. Por lo tanto, desde el punto de vista de la comprensión de los procesos básicos, no es mucho lo que se gana por la consideración de estos modelos de mayor complejidad. En consecuencia, en vez de introducir gravitones u otras formas de materia, nosotros no impondremos los vínculos de los momentos, e impondremos el vínculo hamiltoniano sólo en promedio sobre cada hipersuperficie espacial. Formalmente, esto resultará de asumir que la función de lapso N es función del tiempo solamente.

Por lo tanto, el intervalo adquiere la forma

$$ds^2=-N^2\,dt^2+q(t)\,g_{ij}\,dx^i dx^j \tag{2}$$

donde g_{ij} es la métrica de la hipersuperficie espacial. Además, consideraremos que el potencial V es simplemente un término de masa, es decir

$$V(\phi)=\frac{1}{2}m\,\phi^2,$$

donde m es la masa de los cuantos asociados al campo.

Una configuración arbitraria del campo escalar puede escribirse como

$$\phi(t,x)=\sum_n\phi_n(t)\,Q_n(x) \tag{3}$$

donde las funciones Q_n son las autofunciones del Laplaciano.

Reemplazando en la acción, integrando y absorviendo el volumen de una sección espacial en la masa de Planck, obtenemos

$$S=\frac{1}{2}\int dt\left\{-m_p^2\frac{q\dot{q}^2}{N}+m_p^2Nq+\sum_n\left[\frac{q}{N}\dot{\phi}_n^2-\frac{N}{q}\left(n^2+m^2q^2\right)\phi_n^2\right]\right\} \tag{4}$$

Los momentos canónicos asociados con q y ϕ_n son $\pi=(-m_p^2/N)\dot{q}$ y $P_n=(q/N)\dot{\phi}$, respectivamente, conduciendo al hamiltoniano clásico:

$$H=\frac{N}{2q}\left\{-\frac{1}{m_p^2}\pi^2-m_p^2q^2+\sum_n\left[p_n^2+\left(n^2+m^2q^2\right)\phi_n^2\right]\right\} \tag{5}$$

Para obtener un "tiempo" en esta teoría, romperemos la invariancia ante reparametrizaciones temporales fijando la función de lapso. Con este procedimiento, luego de cuantificar no obtenemos la ecuación de Wheeler-DeWitt, sino una ecuación de Schrödinger. El tiempo que aparece en esta ecuación puede elegirse como el tiempo probabilístico, definido por:

$$\theta=\theta_0\int_0^A da\frac{\mu(a)}{N(a)}\int d\phi|\psi(a,\phi)|^2$$

donde ψ es la función de onda del universo[7]. Cada elección particular de la función de lapso definirá un tiempo probabilístico diferente. La elección más razonable para nuestro propósito es elegir $N = q$, con lo cual $\theta= t/q$ se convierte en el análogo al tiempo conforme en Teoría Cuántica de Campos en Espacio-Tiempos Curvos. Luego, resulta una ecuación de Schrödinger (en la representación de "coordenadas", de modo que $\pi=i\partial_q, p_n=i\partial_{\phi_n}$):

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}=\left\{\frac{1}{2m_p^2}\partial_q^2-\frac{m_p^2}{2}q^2+\frac{1}{2}\sum_n\left[-\partial_{\phi_n}^2+\left(n^2+m^2q^2\right)\phi_n^2\right]\right\}\Psi \tag{6}$$

El Hamiltoniano puede ser expresado en término de operadores de creación y destrucción resultando

$$H=-\omega_0\, a^\dagger a+\int_0^\infty d\omega\,\omega\, b_\omega^\dagger b_\omega+\lambda\int_0^\infty d\omega\, g(\omega)\left(a+a^\dagger\right)^2\left(b_\omega+b_\omega^\dagger\right)^2+cte \tag{7}$$

donde, por simplicidad, hemos modificado al Hamiltoniano original sin modificar sustancialmente las características cualitativas del sistema[8].

Es muy difícil remover el término de interacción. Sin embargo, podemos obtener una solución aproximada mediante un análisis cualtitativo, en la que mostramos un comportamiento esencialmente irreversible.

Es fácil ver que el término de interacción no conserva el número de partículas. Desde el punto de vista físico, el proceso de creación de partículas puede separarse esquemáticamente en tres etapas[9]: En primer lugar, el régimen cuántico, en el cual las partículas se crean a partir de fluctuaciones de vacío y de estados con un número determinado de partículas, "espontáneamente" (debido a la dinámica) y por "estimulación" (debido a las condiciones iniciales). En las segunda etapa, el régimen de interacción: las partículas decaen o se dispersan entre sí y, posiblemente alcanzan el equilibrio térmico. Por último, el régimen clásico, donde la materia es dominada por las colisiones mientras experimenta la expansión del Universo como un fluido relativista. La división entre estos regímenes no es precisa, sino que depende de la frecuencia natural de los modos normales del sistema, la tasa de interacción de las partículas, y de la dinámica del Universo. Estos procesos pueden superponerse entre sí; es decir, las partículas se crean no sólo a partir del vacío sino también a partir de interacciones, y están sujetas permanentemente a un corrimiento al rojo durante la expansión del Universo. El proceso de generación de entropía a partir del régimen clásico es bien comprendido y ha sido calculado usando teoría de campos de temperatura finita. Es también fácil de comprender la causa de la generación de entropía en el régimen de interacción, como debida a la dispersión o decaimiento de partículas que cambian la correlación de los estados iniciales. Sin embargo, en la primera etapa de la creación cuántica a partir del vacío, no es del todo claro qué mecanismo es el responsable de la generación de entropía. Puesto que la evolución del sistema obedece estrictamente leyes cuánticas que son reversibles, sin la intervención de interacciones o mediciones que alteren la correlación, no se espera ningún cambio en la entropía. La solución estandard del problema propone una descripción basada en subdinámicas (teorías de granulado grueso) con generación de entropía por observadores locales.

Dado este panorama, si nos concentramos en el proceso de creación de partículas en las primeras etapas de la evolución cósmica, cuando los números de ocupación son aún pequeños, y la creación espontánea de partículas domina sobre la creación estimulada, entonces en primera instancia podemos considerar sólo la creación de un par de partículas en cada modo y sólo en los estados de más bajo número de ocupación. Luego, bajo estas condiciones el Hamiltoniano del modelo se reduce a

$$
\begin{pmatrix}
-\omega_0+3\lambda\int g(\omega)d\omega \dots & 3\sqrt{2}\lambda g(\omega) & \dots \\
3\sqrt{2}\lambda g(\omega) & -\omega_0+2\omega+3\lambda g(\omega)+3\lambda\int g(\omega)d\omega & \\
\vdots & & \ddots
\end{pmatrix} \tag{8}
$$

donde se han considerado los estados: $|1,0,...0>\equiv |1>$ y $|1,...2_\omega,...>\equiv |\omega>$

Si redefinimos

$$\overline{\omega}_0 = -\omega_0 + 3\lambda\int g(\omega)\, d\omega \tag{9}$$

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_0 + 2\,\omega + 3\,\lambda\, g\,(\omega) \tag{10}$$

obtenemos, para este subespacio, un modelo tipo Friedrichs[4] (sector de una partícula de un oscilador en un reservorio térmico bosónico) de la forma:

$$
\begin{pmatrix}
\overline{\omega}_0 & \dots & 3\sqrt{2}\lambda g(\omega) & \dots \\
3\sqrt{2}\lambda g(\omega) & & \overline{\omega} & \\
\vdots & & & \ddots
\end{pmatrix} \tag{11}
$$

El problema de autovalores puede ser resuelto de un modo exacto utilizando un procedimiento de continuación analítica al plano complejo de manera tal que el conjunto de autovectores generalizados incluye un estado inestable ($|1, 0, ...; 0>$ en nuestro caso) proveniente de la aparición de un polo complejo en la segunda hoja de Riemann de la resolvente de H. Este estado decae exponencialmente hacia el futuro en el tiempo θ, promoviendo transiciones a estados con mayor número de partículas (creación de pares de partículas). Veamos esto en detalle.

El modelo puede ser escrito en la forma:

$$H = \omega_0|1><1| + \int_0^\infty d\omega\, \omega|\omega><\omega| +$$

$$3\sqrt{2}\lambda\int_0^\infty d\omega\, g(\omega)\,\left(|1><\omega|+|\omega><|\right) \tag{12}$$

donde $\omega_0 \,\varepsilon\, \mathcal{R}_{\geq 0}$ y su espacio de Hilbert es $\mathcal{H}=\mathcal{C}\oplus\mathcal{L}^2(0,\infty)$. Por simplicidad, hemos eliminado todas las barras para no recargar la notación (debemos considerar además, $g(\omega) \sim g(\overline{\omega})$, pues sólo basta redefinir algunas constantes despreciando los términos de orden superior en λ.

Las relaciones de ortonormalidad son:

$$<1|1>=1, \quad <\omega|\omega'>=\delta(\omega-\omega'), \quad <1|\omega>=<\omega|1>= \tag{13}$$

y la relación de completitud es:

$$|1><1|+\int_0^\infty d\omega|\omega><\omega|=1 \tag{14}$$

Resolviendo el problema de autovalores, teniendo en cuenta que debemos trabajar con distribuciones (espectro continuo), llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\omega_0\varphi_0+3\sqrt{2}\lambda\int_0^\infty d\omega\, g(\omega)\,\varphi_\omega = z\,\varphi_0 \tag{15}$$

$$3\sqrt{2}\lambda\; g(\omega)\,\varphi_0+\omega\,\varphi_\omega = z\;\varphi_\omega \tag{16}$$

La solución particular de (16) es:

$$\varphi^p_\omega = \frac{3\sqrt{2}\lambda g(\omega)}{z-\omega}\varphi_0 \tag{17}$$

Si $z\in[0,\infty]$, entonces (17) diverge en $\omega = z$. Podemos resolver este problema suponiendo que φ_ω es en realidad una distribución. Luego,

$$\varphi_\omega = \delta(z-\omega)+\frac{3\sqrt{2}\lambda g(\omega)}{z-\omega\pm i\,\varepsilon}\varphi_0 \tag{18}$$

donde $\varepsilon\to 0$.

Reemplazando (18) en la ecuación restante (15), obtenemos

$$\left(z-\omega_0+18\lambda^2\int_0^\infty d\omega\frac{g^2(\omega)}{\omega-z\mp i\,\varepsilon}\right)\varphi_0=\lambda g(z) \tag{19}$$

Definamos, por lo tanto

$$\alpha(z)=z-\omega_0-18\lambda^2\int_0^{\infty}d\omega\frac{g^2(\omega)}{z-\omega} \qquad (20)$$

Si $\alpha(z)\neq 0$ entonces el espectro continuo forma una base completa de autovectores generalizados y el discreto desaparece de la descomposición espectral del operador hamiltoniano. Los autovectores son

$$|\tilde{\omega}>=|\omega>+\frac{\lambda g(\omega)}{\alpha_+(\omega)}\left(|1>+\int_0^{\infty}d\omega'\frac{\lambda g(\omega')}{\omega-\omega'+i\varepsilon}|\omega'>\right)$$

$$<\tilde{\omega}|=<\omega|+\frac{\lambda g(\omega)}{\alpha_-(\omega)}\left(<1|+\int_0^{\infty}d\omega'\frac{\lambda g(\omega')}{\omega-\omega'-i\varepsilon}<\omega'|\right) \qquad (21)$$

donde $\alpha_{\pm}(\omega)\equiv\alpha(\omega\pm i\varepsilon)$ y en λ hemos reabsorbido los factores numéricos.

A partir de los autoestados (21), la descomposición espectral del hamiltoniano resulta:

$$H=\int_0^{\infty}d\tilde{\omega}\tilde{\omega}|\tilde{\omega}><\tilde{\omega}| \qquad (22)$$

Para hacer explícito un comportamiento exponencial (típico en modelos que dan cuenta de la interacción de un sistema con su entorno), extendemos analíticamente el problema de autovalores al plano complejo[10]. Este resultado es válido, bajo las aproximaciones anteriores, dentro del período temporal de interés. La función $\alpha(z)$ no es analítica en todo el plano complejo ya que posee un corte en el eje real positivo. Ahora bien, la integral a lo largo del contorno real positivo que aparece en la ecuación (22), puede ser deformada en otra curva (por ej., una curva en el semiplano complejo inferior), manteniendo los mismos límites de integración y suponiendo que la función $g(\omega)$ no posee polos en esa región. Para realizar tal integración es necesario extender $\alpha_+(z)$ al semiplano complejo inferior, que llamaremos $\alpha_{II}(z)$. Como dicha función debe atravesar el corte, la extensión analítica debe dar cuenta de tal discontinuidad:

$$\alpha_{II}(z)-\alpha(z)=2\pi i\lambda^2|g(z)|^2 \qquad (23)$$

De esta forma, la función $[\alpha(z)]^{-1}$ tiene una continuación meromorfa en el semiplano complejo inferior pero en la segunda hoja de Riemann.

Entonces, $\alpha_{II}(z)=0$ tiene una solución compleja $z=z_0$. Se demuestra que esta raíz es única. La misma puede estimarse para valores pequeños del parámetro λ:

$$z_0\approx\left[\omega_0+P\int_0^{\infty}d\omega\frac{\lambda^2|g(\omega)|^2}{\omega_0-\omega}\right]+i\left[-\pi\lambda^2|g(\omega_0)|^2\right] \qquad (24)$$

donde P denota tomar parte principal (es el valor de la integral sin pasar por $\omega=\omega_0$). Es usual, escribir z_0 en la forma

$$z_0=\tilde{\omega}_0-i\frac{\gamma}{2} \qquad (25)$$

en donde $\tilde{\omega}_0-\omega_0$ es el corrimiento del nivel ω_0 y $1/\gamma$ es la vida media del estado inestable.

La contribución de este polo se calcula fácilmente por residuos. Separando la misma podemos identificar un "autovector" de la forma:

$$|1^->=[\alpha'(z_0)]^{-\frac{1}{2}}\left(|1>+\int_0^{\infty}d\omega\frac{\lambda g(\omega)}{[z_0-\omega]_+}|\omega>\right) \qquad (26)$$

donde con $[\ ]_+$ queremos significar que la integral debe ser tomada en un contorno complejo que pasa por debajo del polo. El correspondiente bra es:

$$<1^+|=[\alpha'(z_0)]^{-\frac{1}{2}}\left(<1|+\int_0^{\infty}d\omega\frac{\lambda g(\omega)}{[z_0-\omega]_+}<\omega|\right) \qquad (27)$$

Tales autovectores satisfacen las ecuaciones:

$$<1^+|H=z_0<1^+| \quad ; \quad H|1^->=z_0|1^-> \qquad (28)$$

Los autovectores correspondientes al continuo están dados por:

$$|\omega^- >=|\omega>+\frac{\lambda g(\omega)}{\eta_+(\omega)}\left[|1>+\int_0^\infty d\omega'\frac{\lambda g(\omega')}{\omega-\omega'+i\varepsilon}|\omega'>\right] \qquad (29)$$

$$<\omega^+|=<\omega|+\frac{\lambda g(\omega)}{\alpha_-(\omega)}\left[<1|+\int_0^\infty d\omega'\frac{\lambda g(\omega')}{\omega-\omega'-i\varepsilon}<\omega'|\right]$$

Como vemos, $<\omega^+|$ en realidad no cambia, porque se va del contorno Γ al contorno $[0, \infty)$ en la primera hoja de Riemann y por lo tanto no se atraviesa ningún polo. Contrariamente, $|\omega^->$ cambia y aparece $\eta_+(\omega)$ porque sí se cruza un polo en la segunda hoja de Riemann. Precisamente, definimos $\eta_+(\omega)$ de modo tal que

$$\int_0^\infty d\omega\frac{\Phi(\omega)}{\eta_+(\omega)}=\int_\Gamma dz\frac{\Phi(z)}{\alpha_+(z)}=\int_0^\infty d\omega\frac{\Phi(\omega)}{\alpha_+(z)}+\frac{2\pi i}{\alpha_+'(z_0)}\Phi(z_0) \qquad (30)$$

donde $\Phi(z)$ es cualquier función de prueba que admita una extensión analítica en el semiplano complejo inferior en la segunda hoja. Usando la extensión de la función δ definida por Gel'fand [11] podemos escribir la última ecuación en la forma

$$\frac{1}{\eta_+(\omega)}=\frac{1}{\alpha_+(\omega)}+2\pi i\frac{\delta(z-z_0)}{\alpha_+'(z_0)} \qquad (31)$$

Los autovectores hallados cumplen las relaciones de ortonormalización

$$<1^+|1^->=1,\quad <1^+|\omega^->=<\omega^+|1^->=0,$$
$$<\omega^+|\omega'>=\delta(\omega-\omega') \qquad (32)$$

y la relación de completitud

$$|1^-><1^+|+\int_0^\infty d\omega|\omega^-><\omega^+|=1 \qquad (33)$$

Luego, el hamiltoniano tiene la siguiente descomposición espectral:

$$H=z_0|1^-><1^+|+\int_0^\infty d\omega\omega|\omega^-><\omega^+| \qquad (34)$$

Dado que los autovectores $|1^->$ y $<1^+|$ corresponden a autovalores complejos de un operador autoadjunto, los mismos no pueden pertenecer a un espacio de Hilbert. Por lo tanto, debemos darles un significado riguroso como vectores generalizados en un espacio de Hilbert Equipado [12]. Luego, debemos hallar funciones de prueba (pertenecientes a un espacio Φ) tales que

$$<\phi|1^->=\left[\alpha'(z_0)\right]^{-\frac{1}{2}}\left(<\phi|1>+\int_0^\infty d\omega\frac{\lambda g(\omega)}{[z_0-\omega]_+}<\phi|\omega>\right) \qquad (35)$$

esté bien definido (es decir, sea finito). Entonces, si por ejemplo, tomamos la última expresión, es suficiente que $<\omega|\phi>$ tenga una extensión analítica a una región del semiplano inferior (región a la cual extendimos $\alpha(z)$), que contenga la singularidad z_0, de modo que la integral defina una función analítica evaluada en z_0. Siempre, asumiremos que la función $g(\omega)$ es una buena función, es decir, tiene una extensión en el semiplano inferior libre de singularidades. La elección más simple para $<\omega|\phi>$ que no depende de la ubicación de z_0, es tomar que $<\omega|\phi>$ es una función de *Hardy* [13] desde abajo (Φ_-):

$$<\omega|\phi>\varepsilon\Phi_-,\ ó \qquad <\phi|\omega>\varepsilon\Phi_+ \qquad (36)$$

Podemos extender el espacio de Hilbert de estados $\mathcal{H}^+$ o $\mathcal{H}^-$ (haciendo un análisis análogo para $<1^+|\phi>$) formando dos tripletes de Gel'fand [11]:

$$\Phi_\pm\subset\mathcal{H}\subset\mathcal{H}^\pm \qquad (37)$$

Así, $|1^->\ \varepsilon\ \Phi_-^\times=\mathcal{H}^-$ la extensión de $\mathcal{H}$ con funciones de prueba en el espacio(Φ_-). Análogamente, $|1^+> \varepsilon\ \Phi_+^\times = \mathcal{H}^+$. Luego, la ec. (34) tiene un significado riguroso en estos espacios, y queda justificada la presencia de autovalores complejos.

Queremos hallar la evolución temporal de estos autovectores generalizados. Para tal fin, resulta ser muy importante la siguiente propiedad de las funciones de Hardy. A partir del teorema de Paley-Wiener, sabemos que las funciones de Hardy desde arriba $\phi(\omega)$, tienen solamente coeficientes de Fourier $\hat{\phi}(\omega)$ no nulos para valores positivos de s:

$$\phi(\omega) = \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega s}\, \hat{\phi}(s) \tag{38}$$

$$\hat{\phi}(s) = \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega s}\, \phi(\omega) \tag{39}$$

La transformada de Fourier de la clase de Hardy Φ_+ es el espacio de funciones de cuadrado integrable con soporte sobre el semieje real positivo. Como la transformada de Fourier de $e^{i\omega\theta}\,\phi(\omega)$ es la transformada $\hat{\phi}(s)$ desplazada hacia la derecha:

$$\widehat{e^{i\omega\theta}\,\phi(\omega)} = \hat{\phi}(s-\theta) \tag{40}$$

luego, una función con soporte en $[0, \infty)$ es corrida a una función con soporte en $[\theta, \infty)$. Por lo tanto, para tiempos negativos, la función desplazada no tiene más soporte en $[0, \infty)$. El mismo argumento, muestra que la clase de Hardy Φ_- tiene la propiedad análoga. Luego, podemos decir que:

$$\begin{gathered} Si\ \phi(\omega)\,\varepsilon\,\Phi_+ \Rightarrow e^{i\omega\theta}\,\phi(\omega)\,\varepsilon\,\Phi_+\ para\ \theta>0\ solamente \\ Si\ \phi(\omega)\,\varepsilon\,\Phi_- \Rightarrow e^{i\omega\theta}\,\phi(\omega)\,\varepsilon\,\Phi_-\ para\ \theta<0\ solamente \end{gathered} \tag{41}$$

Si aplicamos esta propiedad a los autovectores generalizados de autovalor complejo, obtenemos

$$\begin{gathered} e^{-iH\theta}\,|1^-> = e^{-i\tilde{\omega}_0\theta}\, e^{-\frac{\gamma}{2}\theta}\,|1^->, \quad \theta>0 \\ e^{-iH\theta}\,|1^+> = e^{-i\tilde{\omega}_0\theta}\, e^{\frac{\gamma}{2}\theta}\,|1^+>, \quad \theta<0 \end{gathered} \tag{42}$$

es decir, el estado $|1^->$ decae hacia el futuro y el estado $|1^+>$ lo hace hacia el pasado. Tal desdoblamiento conduce a una evolución unitaria en el tiempo que tiene la propiedad de semigrupo, tal que el autovalor del generador del semigrupo corresponde al polo en la segunda hoja de Riemann de $\alpha_{II}(z)^{-1}$ y los autovectores son autovectores generalizados con autovalor complejo. Este comportamiento corresponde a una evolución intrínsecamente irreversible.

Si ahora aplicamos la operación de inversión temporal [14] definida para los vectores de Φ y extendida para los vectores de $\Phi^\times$, podemos ver que los estados que decaen hacia el pasado se transforman en vectores que decaen hacia el futuro y viceversa, es decir

$$K|1^-> = |1^+> \quad ; \quad K|1^+> = |1^- \tag{43}$$

donde K es la extensión del operador de Wigner de inversión temporal en el triplete de Gel'fand. Para su demostración, tomaremos un ket genérico $|\alpha^+>$. Queremos ver que

$$K|\alpha^+> = |\alpha^-> \tag{44}$$

puesto que K es un operador antilineal, cumple que para $|\Phi> \varepsilon\ \mathcal{H}$,

$$(<\Phi|K)|\alpha^+> = \left[<\Phi|\left(K|\alpha^+>\right)\right]^* \tag{45}$$

si trabajamos en una base real de modo que $K|\Phi> = |\Phi^*>$, es decir si $<\Phi| = \sum \Phi_\alpha <\alpha| \Rightarrow <\Phi^*| = \sum \Phi_\alpha^* <\alpha|$, entonces el primer miembro de (45) resulta

$$<\Phi^*|\alpha^+> = \sum_\alpha \Phi_\alpha^* <\alpha|\alpha^+> = \left[\sum_\alpha \Phi_\alpha <\alpha|\alpha^->\right]^* = \left[<\Phi|\alpha^->\right]^* \tag{46}$$

donde hemos usado que (ver ecuaciones (26), (27) y (29)):

$$<\alpha|\alpha^+> = \left[<\alpha|\alpha^->\right]^* \tag{47}$$

y que al comparar con el segundo miembro de (45), resulta demostrada (44).

De este modo, hemos mostrado que un estado que decae es transformado en un estado que se forma y *viceversa*. Pero, el operador K está bien definido en $\mathcal{H}$, y no en $\mathcal{H}^-$ o $\mathcal{H}^+$, puesto que K: $\mathcal{H}^- \rightarrow \mathcal{H}^+$ y $K^\dagger$: $\mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-$. Sin embargo, todo estará bien definido si trabajamos en sólo uno de los espacios, es decir, en $\mathcal{H}^-$ o en $\mathcal{H}^+$.

Por lo tanto, es necesaria la introducción de una regla de *superselección* que prohíba la combinación de vectores de los dos espacios de Hilbert Equipados para que el decaimiento produzca una flecha del tiempo sustancial. Es decir, postulamos

"*Los estados del universo pertenecen a* $\mathcal{H}^-$ (o $\mathcal{H}^+$)".

De esta manera, si bien la elección entre $\mathcal{H}^-$ o $\mathcal{H}^+$ es convencional, la dirección del tiempo en cada uno de ellos puede definirse de modo sustancial. Esta es, en esencia, la causa de la aparición de un comportamiento irreversible del sistema (en nuestro caso, un modelo simplificado del universo).

Si consideramos, como discutimos anteriormente, que inicialmente el universo se encuentra en el estado de menor número de partículas $|1>$, podemos calcular la amplitud de supervivencia del mismo a lo largo del tiempo θ. La misma está dada por:

$$<1|e^{-iH\theta}|1> = \frac{1}{\alpha'_{II}(z_0)} e^{-iz_0\theta} + \lambda^2 \int e^{-i\omega\theta} \frac{g^2(\omega)}{\alpha_+(\omega)\alpha_-(\omega)} d\omega \qquad (48)$$

donde el primer sumando es el que predomina a cortos tiempos (comportamiento exponencial) y el segundo sumando es el *background* continuo, el cual es relevante a tiempos más largos. Vemos entonces que, el estado $|1>$ es inestable, lo cual, en nuestro modelo, significa que la probabilidad de transición a estados de mayor número de partículas está gobernada por una ley de crecimiento exponencial.

Finalmente, podemos encontrar una funcional de Lyapunov considerando la transformación que diagonaliza el hamiltoniano, que en este caso puede escribirse como [15]

$$\Lambda = |1^-><1| + \int_0^\infty d\omega |\omega^-><\omega| \qquad (49)$$

donde $|1>$, $|\omega>$ es la base del sistema no perturbado. Esta transformación no es unitaria como en el caso de la Mecánica Cuántica usual sino que verifica

$$K\Lambda^\dagger K^\dagger = \Lambda^* = |1><1^+| + \int_0^\infty d\omega\, |\omega><\omega^+| \qquad (50)$$

tal que

$$\Lambda^*\Lambda = 1, \quad \Lambda^* = \Lambda^{-1} \qquad (51)$$

por lo tanto, Λ es una transformación que llamaremos estrella-unitaria. Esta transformación fue obtenida por primera vez por Prigogine [16] y colaboradores pero en un inadecuado marco matemático e invocando a una errónea propiedad de inversión temporal en el caso de la termodinámica de los procesos irreversibles.

Con ayuda de la transformación definida en (49) y aplicando la proyección sobre la parte discreta del espectro (en este sentido podemos decir que sólo retenemos la información macroscópica relevante aportada por el estado inestable, considerando al continuo como un baño irrelevante), es fácil construir una variable de Lyapunov $\mathcal{Y}$ como

$$\mathcal{Y} = -\left[\Lambda^* |1^-(\theta)>\right]^\dagger \left[\Lambda^* |1^-(\theta)>\right] \qquad (52)$$

desarrollando

$$\mathcal{Y} = -e^{i\left(z_0^* - z_0\right)\theta} = -e^{-\gamma\theta} \quad para\ \theta > 0 \qquad (53)$$

la cual es una función monótonamente creciente en el tiempo, dado que

$$\frac{d\mathcal{Y}}{d\theta} > 0 \qquad (54)$$

y además,

$$\lim_{\theta\to\infty} \mathcal{Y} = 0 \qquad (55)$$

El estado de equilibrio puede ser considerado como aquél que maximiza la función de Lyapunov.

El crecimiento monótono de $\mathcal{Y}$ en el tiempo θ, representa la flecha del tiempo termodinámica. Sabemos además, que el tiempo probabilístico θ está relacionado con la flecha del tiempo cosmológicas [7]. Por lo tanto, podemos concluir que, en este sencillísimo modelo, hemos correlacionado las flechas del tiempo termodinámica y cosmológica.

REFERENCIAS

1. S. Nakajima. Prog. Theor. Phys. **20**, 948 (1958). R. Zwanzig, J. Chem. Phys. **33**, 1338 (1960).
2. I. Prigogine. *From being to becoming*, (Freedman Co., 1980).
3. J. von Newmann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1955).
4. K. Friedrichs, Comm. Pure Appl. Math. **1**, 361 (1948).
5. M. Castagnino, Phys. Rev. **D39**, 2216 (1989).
6. E. Calzetta, M. Castagnino y R. Scoccimarro. Phys. Rev. **D45**, 2806 (1992).
7. M. Castagnino y F. Lombardo. Phys. Rev. **D48**, 1742 (1993); ANALES AFA **4** (1993).
8. D. Sforza. *Asimetría temporal en Cosmología Cuántica*, Tesis FCEyN-UBA, 1993.
9. B. Hu y D. Pavon. Phys. Lett. **B180**, 329 (1986).
10. E. Sudarshan, C. Chiu y V. Gorini. Phys. Rev. **D18**, 2914 (1978).
11. I. Gel'fand y N. Vilenkin. *Generalized Funstions*, (Academic Press, New York, 1964).
12. A. Bohm. *The Rigged Hilbert Spaces and Quantum Mechanics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1973).
13. M. Gadella, J. Math. Phys. **25**, 2461 (1984).
14. M. Castagnino, F. Gaioli y E. Gunzig, Preprint IAFE (1993).
15. M. Castagnino y F. Gaioli. *Autovalores complejos en Mecánica Cuántica*, ANALES AFA **4** (1993).
16. I. Prigogine, C. George, F. Henin y L. Rosenfeld. Chem. Scripta **4**, 5 (1973).