ARGUMENTO DE EINSTEIN, PODOLSKY, ROSEN Y NO-SEPARABILIDAD

M. Bellini
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Mar del Plata, Funes 3350 (7600) Mar del Plata

Se formaliza el argumento de Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) teniendo en cuenta su evolución temporal. Se utiliza la función de covariancia cuántica (FCQ) para estudiar la separabilidad de dicho sistema y calcular el valor de los conmutadores del mismo, obteniéndose conmutadores "no locales" no nulos.

I. INTRODUCCIÓN

En un trabajo anterior[1] se sugirió la existencia de conmutadores no locales en ciertos sistemas cuánticos correlacionados, a partir del argumento de Popper. Los valores de espectación de las relaciones de conmutación entre operadores se calcularon utilizando la parte imaginaria de la *FCQ* evaluada sobre estos operadores, es decir, para dos operadores cualesquiera *A* y *B*, se tenía:

$$< [A, B] > = 2\, Im(T(A, B \mid \psi)).$$

En este trabajo se formaliza el argumento de *EPR* [2-4] teniendo en cuenta su evolución temporal. Para ello, al igual que en Ref. 1, se utiliza la *FCQ* para calcular el valor de los conmutadores entre los distintos operadores del sistema.

II. EPR UNIDIMENSIONAL PARA UN SISTEMA DE DOS PARTÍCULAS

En este punto se calcularán los valores esperados de los conmutadores del sistema físico propuesto por *EPR*, formado por dos partículas que se alejan entre sí, caracterizadas por observables (posición y momento) unidimensionales. Para ello [1] se utilizará la *FCQ*.

Se tiene un sistema de dos partículas de masa *m* emitidas desde una fuente puntual. Las posiciones de las partículas **1** y **2** en el instante t_i se denotarán $x(t_i)$ e $y(t_i)$ respectivamente (ver Fig. 1).

Sea $\{\varphi x\}$ base de un espacio de Hilbert $\mathbb{H}_1$ para una partícula y $\{\phi\, y\}$ la base de un espacio $\mathbb{H}_2$ para la otra, correspondientes a los operadores de posición $x(t_i)$ e $y(t_i)$ de las partículas **1** y **2** respectivamente. La función de estado del sistema pertenece al espacio de Hilbert $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$. Se llamará $D(t_i, t_i) = x(t_i) \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes y(t_i)$ a la "distancia" entre las partículas **1** y **2** en el instante t_i. $P = P_x \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_y$ es el momento total del sistema, P_x el momento de la partícula **1** y P_y el momento de la partícula **2**. Se utiliza la representación posición, y se prepara el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} D(0,0)\, \psi(x', y', t=0) = d\, \psi(x', y', 0) \\ P = < P_x > + < P_y > = p_{ox} - p_{oy} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

donde $\psi(x', y', 0)$ es la función distribución en el instante $t = 0$ y estará dada por:

$$e^{-\alpha(x'-d/2)^2 - (w\hbar) p_{ox} x'} \; e^{-\beta(y'-d/2)^2 + (w\hbar) p_{oy} y'}$$

$$\delta(x' - y' - d)$$

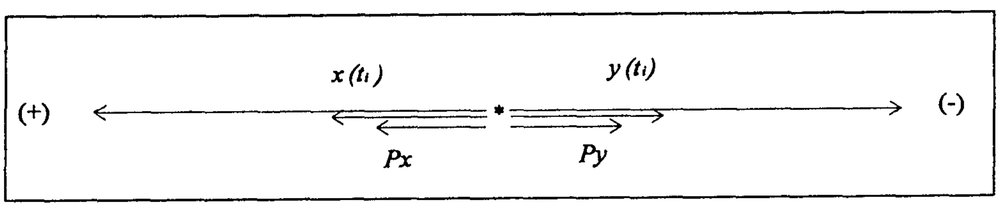

Fig. 1: Esquema del argumento de EPR unidimensional para dos partículas.

De la preparación (1) se deduce que $[x(o), P]$ y $[y(o), P]$ no son nulos, luego α y β deben tener valores finitos. Por otro lado, (p_{ox}) y $(-p_{oy})$ son los valores esperados de los momentos p_x y p_y respectivamente. La función de estado del sistema será (para $t = 0$):

$$\psi = N \int dx' dy' \psi(x', y', 0)\, \varphi x \otimes \phi y \cdot$$

Si se escriben explícitamente los operadores $D(t_i, t_i)$ y p:

$$D(t_i, t_i) = x(t_i) \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes y(t_i)$$

$$= \left(x(o) + \frac{P_x\, t_i}{m} \right) \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \left(y(o) + \frac{P_y\, t_i}{m} \right),$$

$$P = P_x \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_y,$$

donde se ha usado:

$$x(t_i) = \left(x(o) + \frac{P_x\, t_i}{m} \right) \otimes \mathbb{1},$$

$$y(t_i) = \mathbb{1} \otimes \left(y(o) + \frac{P_y\, t_i}{m} \right).$$

Los conmutadores entre los distintos operadores estarán dados por:

$$[x(o), P_x] = 2\, Im\left(T\left(x(o), P_x \mid \psi\right)\right) i\hbar$$

$$[x(o), P_y] = 2\, Im\left(T\left(x(o), P_y \mid \psi\right)\right) i\hbar$$

$$[y(o), P_x] = 2\, Im\left(T\left(y(o), P_x \mid \psi\right)\right) i\hbar$$

$$[y(o), P_y] = 2\, Im\left(T\left(y(o), P_y \mid \psi\right)\right) i\hbar$$

$$[P_x, P_y] = 2\, Im\left(T\left(P_x, P_y \mid \psi\right)\right) = 0$$

luego,

$$[D(t_i, t_i), P_x] = 0$$

$$[D(t_i, t_i), P_y] = 0$$

$$[P_x, P] = [P_x, P_x + P_y] = [P_x, P_x] + [P_x, P_y] = 0$$

$$[P_y, P] = [P_y, P_x + P_y] = [P_y, P_x] + [P_y, P_y] = 0$$

$$[D(t_i, t_i), P] = [x(t_i) - y(t_i), P] = [x(t_i), P] - [y(t_i), P] = 0$$

III. SEPARABILIDAD EN EL ARGUMENTO DE EPR UNIDIMENSIONAL

En este punto se estudiará la separabilidad del sistema caracterizado por la preparación (1). Si éste es separable, la *FCQ* debe ser nula[1], en caso contrario no lo será. si $x(t_i)$ e $y(t_i)$ son respectivamente las posiciones de las partículas **1** y **2** en el instante t_i, la *FCQ* entre ambas posiciones $(T(x(t_i), y(t_i), \psi) = K$ será:

$$K = \langle x(t_i)\, y(t_i) \rangle - \langle x(t_i) \rangle \langle y(t_i) \rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{2} \{x(t_i), y(t_i)\} \right\rangle - \langle x(t_i) \rangle \langle y(t_i) \rangle +$$

$$i \left\langle \frac{1}{(2i)} [x(t_i), y(t_i)] \right\rangle$$

Si se la calcula se obtiene:

$$K = \left\langle \left(x(o) + \frac{t_i}{m} x \right) \left(y(o) + \frac{t_i}{m} P_y \right) \right\rangle -$$

$$\left\langle x(o) + \frac{t_i}{m} P \right\rangle \left\langle y(o) + \frac{t_i}{m} P_y \right\rangle$$

$$= [\langle x(o)\, y(o) \rangle - \langle x(o) \rangle \langle y(o) \rangle] + [\langle P_x\, P_y \rangle -$$

$$\langle P_x \rangle \langle P_y \rangle\ ]\ (t_i / m)^2 + \Big\{ [\langle x(o)\, P_y \rangle - \langle x(o) \rangle \langle P_y \rangle]$$

$$\frac{t_i}{m} + [\langle P_x\, y(o) \rangle - \langle P_x \rangle \langle y(o) \rangle] \frac{t_i}{m} \Big\}$$

$$= T(x(o), y(o) \mid \psi) + (t_i / m)^2\ T(P_x, P_y \mid \psi) +$$

$$\frac{t_i}{m} T(x(o), P_y \mid \psi) + \frac{t_i}{m} T(P_x, y(o) \mid \psi\ )$$

$$= \frac{1}{4(\alpha + \beta)} + 2 (t_i / m)^2 (\alpha + \beta) \hbar^2.$$

Por lo tanto, como $K \neq 0$, el sistema unidimensional de dos partículas, no es separable en el estado ψ. Lo interesante de este resultado es que la covariancia no es constante sino que depende del tiempo. El primer término surge de la covariancia $T(x(o),y(o)|\psi)=\langle\frac{1}{2}\{x(o),y(o)\}\rangle-\langle x(o)\rangle\langle y(o)\rangle$ y depende de la preparación del sistema (esto es, de α y β) en el instante $t = 0$. El segundo término $T(P_x,P_y|\psi)=\langle\frac{1}{2}\{P_x,P_y\}\rangle-\langle P_x\rangle\langle P_y\rangle$, depende de α, β, y $t_i^{\,2}$. La parte imaginaria se anula puesto que el valor esperado del conmutador $\left[x(t_i),y(t_i)\right]$ es nulo.

IV. CONCLUSIÓN GENERAL

Utilizando la *FCQ* se observa que el sistema propuesto por *EPR* es no separable, si se tiene en cuenta la evolución temporal del mismo. Se calculó el valor de los conmutadores utilizando la parte imaginaria *FCQ* obteniéndose conmutadores "no locales" no nulos, hecho que se debe a la correlación entre las posiciones de ambas partículas debida a la preparación del sistema.

REFERENCIAS

1. M. Bellini. *Argumento de Popper y no–separabilidad.* Aceptado para su publicación en Anales de AFA, 1992.
2. K. R. Popper. *Teoría Cuántica y Sisma en Física.* Tecnos, Madrid 1985.
3. Franco Selleri. *El debate de la teoría Cuántica.* Alianza, Madrid 1986.
4. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen. Phys. Rev., **47**, 777 (1935).