POTENCIALES CUASI-EXACTAMENTE SOLUBLES EN UN MODELO DE COMPETENCIA BIOLÓGICA

H. S. Wio*, M. Kuperman**
Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, (8400) San Carlos de Bariloche, Argentina.

B. von Haeften, M. Bellini, R. Deza
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Mar del Plata, Funes 3350, (7600) Mar del Plata, Argentina.

Estudiamos el comportamiento temporal de poblaciones de dos especies que compiten por una misma fuente de alimentos, a fin de analizar la posibilidad de coexistencia de especies para un modelo unidimensional. Considerando el alimento como una onda viajera, y suponiendo estados estacionarios se explota la analogía con la ecuación de Schrödinger. Se presenta un ejemplo de potencial simétrico truncado cuasi-exactamente soluble que determina las condiciones iniciales del sistema.

I. INTRODUCCIÓN

El análisis de las interacciones entre especies es importante para la Biología. De estas interacciones las más estudiadas son la depredación y la competencia: en la primera, una especie se beneficia en perjuicio de la otra, mientras que en la segunda, ambas especies se inhiben mutuamente. El modelo aquí estudiado corresponde a un tipo de interacción competitiva, dos especies que se ven afectadas indirectamente por la escasez de un recurso común (alimento). En la naturaleza se observa, frecuentemente, que esa lucha por la existencia termina con la extinción completa de una de las especies, fenómeno que es conocido como *principio de exclusión competitiva*. La especie sobreviviente se llama especie fuerte, y la que se extingue, especie débil. En nuestro modelo, se presenta esta situación en el caso homogéno (sin dependencia espacial). La coexistencia de especies es posible si la especie débil se mueve, pues entonces, puede sobrevivir siguiendo una fluctuación o una onda viajera de alimento que se propaga en el medio.

II. EL MODELO

Consideraremos un ecosistema consistente en dos especies N y n que compiten por el mismo alimento M. El modelo es descripto por el sistema de ecuaciones usadas por Mikhailov[4], para analizar la coexistencia de especies en un ambiente fluctuante (escaleadas en forma adecuada).

$$\begin{aligned}
\partial_t N(x,t) &= [\beta M(x,t)-\alpha]\, N(x,t)\\
\partial_t n(x,t) &= [M(x,t)-1]\, n(x,t)+\partial_x^2\, n(x,t)\\
\partial_t M(x,t) &= q-[g+\beta N(x,t)+n(x,t)]\, M(x,t),
\end{aligned} \tag{1}$$

donde en la primera de las ecuaciones βMN representa el crecimiento de N y $-\alpha N$ su mortalidad. En la segunda de las ecuaciones, el crecimiento de n está dado por Mn, la mortalidad depende de n y se observa un tercer término correspondiente a la difusión de la especie n. En la tercera de las ecuaciones aparece un término fuente q y los restantes representan la disminución de M debido a la mortalidad propia y a su interacción con n y N. El requerimiento para N sea la especie fuerte en el caso homogéneo es que se cumpla:

$$\alpha < \beta. \tag{2}$$

Considerando la transformación de variables $\xi = x-ct$ es posible escribir el sistema en la forma:

$$\begin{aligned}
\partial_t N(\xi,t) &= [\beta M(\xi,t)-\alpha]\, N(\xi,t)+c\partial_n N(\xi,t)\\
\partial_t n(\xi,t) &= [M(\xi,t)-1]\, n(\xi,t)+c\partial_\xi\, n(\xi,t)+\partial_\xi^2\, n(\xi,t)\\
\partial_t M(\xi,t) &= q-[g+\beta N(\xi,t)+n(\xi,t)]+c\partial_\xi\, M(\xi,t)
\end{aligned} \tag{3}$$

* Investigador del CONICET
** Becario del CONICET

III. SOLUCIONES ESTACIONARIAS

El estudio analítico del problema es posible proponiendo para n la forma

$$n \approx e^{-\frac{c\xi}{2}} \varphi(\xi, t) \tag{4}$$

que lleva a una ecuación tipo Schrödinger para φ:

$$\varphi'' + \left(M - 1 - \frac{c^2}{4} \right) \varphi = \partial_t \varphi \tag{5}$$

en el cual $-M$ juega el rol de un potencial y el valor de la velocidad c se relaciona con la energía del estado fundamental

$$c^2 = 4\left(-1 - E_f\right). \tag{6}$$

La población N para la especie no difusiva está dada por

$$N = N(\xi_o)\, e^{\frac{1}{c}\int_{\xi_o}^{\xi} [\beta M(\xi) - \alpha] d\xi} \tag{7}$$

y el término de la fuente q consistente con el estado estacionario es

$$q(\xi) = \left[g + \beta N^s(\xi) + n^s(\xi) \right] M^s - c\partial_\xi M^s(\xi). \tag{8}$$

Este término juega el rol de control, y contiene toda la influencia exterior del sistema.

Si proponemos para $V(\xi) = -M(\xi)$ potenciales cuasi-exactamente solubles conocidos, podremos encontrar expresiones analíticas exactas para las poblaciones n, N y M las cuales, tienen la forma de ondas viajeras (estacionarias).

Como ejemplo, adoptemos para M la siguiente expresión (potencial séxtico, simétrico y truncado):

$$M = \begin{cases} 3\sqrt{a_3}\, x^2 - a_3 x^2 \left(x^2 + \frac{a_2}{2a_3} \right)^2 + \frac{\alpha}{\beta} & \text{si } -1 \le \xi \le 1 \\ \frac{\alpha}{\beta} & \text{si } |\xi| > 1 \end{cases}$$

La ecuación de Schrödinger correspondiente será

$$\psi'' + \left[M - \left(1 + \frac{c^2}{4} \right) \right] \psi = 0 \tag{9}$$

El estado fundamental de esta ecuación está dado por la expresión[3]

$$\psi_o \propto \exp\left[-\frac{a_2}{4\sqrt{a_3}} \xi^2 - \frac{\sqrt{a_3}}{4} \xi^4 \right] \tag{10}$$

y su correspondiente autovalor de energía para el estado fundamental es

$$E_f = -\frac{a_2}{2\sqrt{a_3}} + \frac{\alpha}{\beta}, \tag{11}$$

obteniéndose para la especie débil

$$n \propto \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{c}{2}\right)\xi + \frac{a_2}{4\sqrt{a_3}} \xi^2 + \frac{\sqrt{a_3}}{4} \xi^4 \right] & \text{si } -1 \le \xi \le 1 \\ R \exp\left[-\left(\frac{c}{2}\xi \pm \sqrt{-\left(E_f + \frac{\alpha}{\beta} \right) x} \right) \right] & \text{si } |\xi| > 1 \end{cases},$$

con R dado por

$$R = e^{-\left(\frac{a_2}{4a_3} + \frac{\sqrt{a_3}}{4} + \sqrt{-\left(E_f + \frac{\alpha}{\beta} \right)} \right)} \tag{12}$$

Para la especie fuerte tendremos

$$N = \begin{bmatrix} \exp\left[-\left(\sqrt{a_2}\left(\xi^3 - 1\right) + \frac{a_3}{7}\left(\xi^7 - 1\right) + \frac{a_2}{5}\left(\xi^5 - 1\right) + \frac{a_2}{6}\left(\xi^3 - 1\right) \right) \right] & \\ & \text{si } -1 \le \xi \le 1 \\ 1 & \text{si } \xi > 1 \\ \exp\left[-2\sqrt{a_2} + \frac{1}{2}a_3 + \frac{2}{5}a_2 + \frac{1}{3}a_2 \right] & \text{si } \xi < 1 \end{bmatrix}$$

A continuación, se presentan las gráficas de evolución para la especie débil n (Fig. 1), la fuerte N (Fig. 2) y el alimento M (Fig. 3). Se observa que permanecen estables al propagarlas con una velocidad de 0.043. En la Fig. 4 se graficaron las condiciones iniciales de n, N y M. En la Fig. 5 se graficó la fuente q. Se observa que sus dos picos coinciden con los del alimento M (ver Fig. 4).

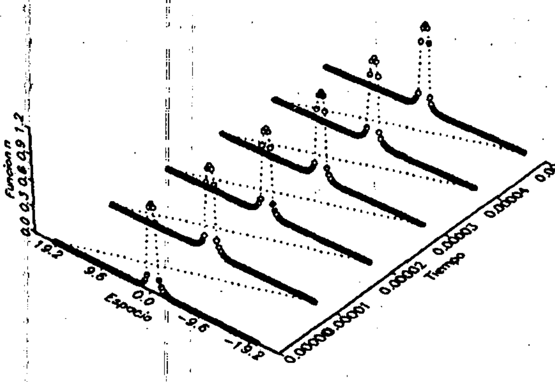

Fig. 1: Especie débil n. Evolución Temporal.

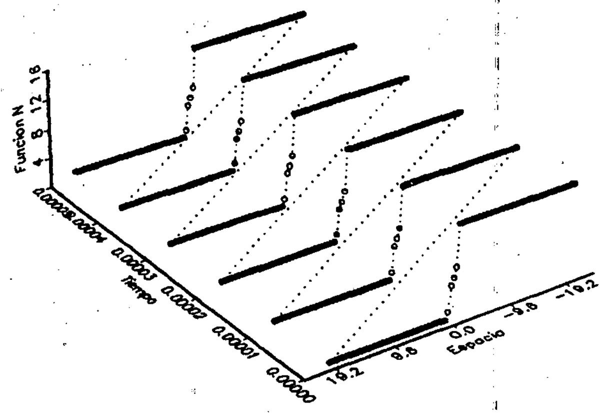

Fig. 2: Especie fuerte N. Evolución Temporal.

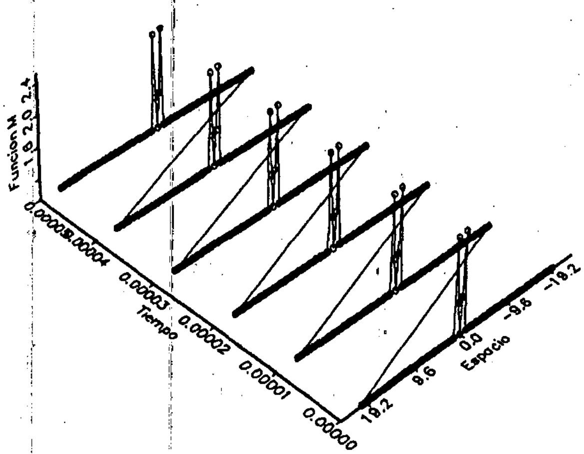

Fig. 3: Alimento M. Evolución Temporal.

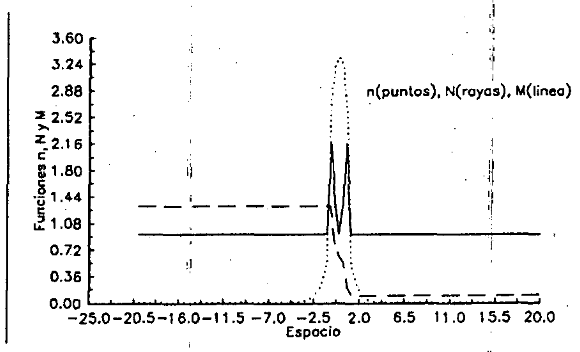

Fig. 4: Condiciones Iniciales. Especies n, N y alimento M.

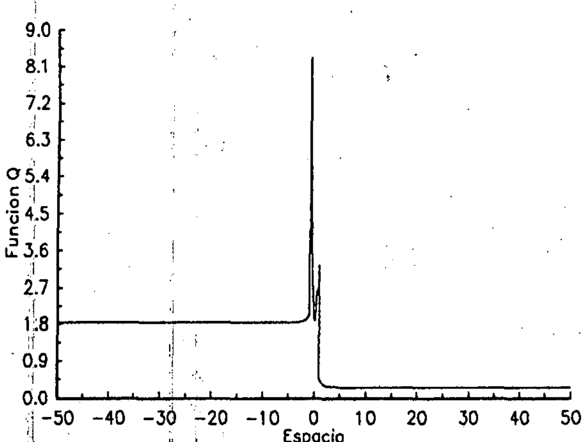

Fig. 5: Fuente Q.

V. CONCLUSIONES

Se ha estudiado un modelo de competencia biológica en el que dos especies n y N compiten por un mismo alimento, simulado por un potencial truncado cuasi-exactamente soluble. Se estudió el rango de velocidades para el cual el sistema es estable, a partir de las condiciones iniciales, obtenidas mediante la resolución del sistema cuántico, teniendo en cuenta la energía del estado fundamental; única solución que nos interesa, debido a que no posee nodos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado con apoyo parcial del CONICET.

REFERENCIAS

1. J. D. Murray. Mathematical Biology; Springer-Verlag (Berlin, 1985).
2. C. Schat. Trabajo Final. Instituto Balseiro, (1992).
3. L. D. Salem and R. Montemayor. Phys. Rev. A43,1169 (1991).
4. Mikhailov, Z. Phys. B. Condensed Matter 41, 277-282 (1981).
5. C. Schat y H. S. Wio. Enviado para su publicación a Math. Biosc.
6. M. Kuperman, B. von Haeften y H. S. Wio. En preparación.