LA ECUACIÓN DE DIRAC EN D = 1+1: MAPEO EN UNA MECÁNICA CUÁNTICA SUSY

M. Bellini, R. R. Deza

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Mar del Plata, Funes 3350, (7600) Mar del Plata

R. Montemayor*

Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica e Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, (8400) San Carlos de Bariloche, Argentina

En este trabajo desarrollamos un mapeo entre el hamiltoniano de Dirac en 1+1 y un hamiltoniano supersimétrico cuyas componentes son hamiltonianos de Schrödinger. Aprovechando esta relación, planteamos el análisis de las condiciones de solubilidad o cuasi-solubilidad para sistemas fermiónicos de esta dimensión.

I. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Dirac en 1+1 da lugar a un par de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas para las componentes del biespinor. En el caso de soluciones estacionarias estas ecuaciones pueden ser fácilmente desacopladas en dos ecuaciones de segundo orden tipo Schrödinger, que definen un hamiltoniano supersimétrico. Cada una de las componentes del biespinor pasa a ser componente de la función de onda supersimétrica. A partir de este punto es inmediato establecer las condiciones de resolubilidad[1], que pueden caracterizarse en forma muy compacta bajo la condición de invariancia de forma supersimétrica[2].

El concepto usual de hamiltoniano soluble implica tener expresiones cerradas para el conjunto completo de autofunciones y autovalores. Existe una categoría más amplia de hamiltonianos, los denominados cuasi-exactamente solubles[3-6], que tienen sólo un subconjunto de su espacio de estados expresable en forma cerrada. En el contexto de la Mecánica Cuántica no-relativista pueden ser estudiados y clasificados con relativa facilidad en base a una ecuación de Riccati modificada para la derivada logarítmica de la función de onda[3]. De esta forma el método de Riccati modificado puede fácilmente ser extendido para su análisis a la Mecánica Cuántica Relativista en una dimensión.

En la siguiente sección mostramos la relación entre la ecuación de Dirac y la ecuación de Schrödinger en 1+1, y a partir de allí, en la tercera sección planteamos el análisis de solubilidad para la ecuación de Dirac. Finalmente en la sección IV desarrollamos algunos ejemplos simples.

II. LA ECUACIÓN DE DIRAC EN 1+1

Dada la ecuación de Dirac en 1+1

$$\left(i\gamma_{\mu}\,\partial^{\mu}-V(x)\right)\psi(x)=0 \qquad (1)$$

consideraremos la siguiente representación para las matrices γ^0 y γ^1:

$$\gamma^0=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\gamma^1=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad (2)$$

En 1+1 la parte real e imaginaria de cada una de las componentes de los espinores

$$\psi=\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

sólo difieren en un factor de fase, dado que en la ecuación de Dirac unidimensional no hay términos imaginarios. Las soluciones de (1) con energía ω pueden escribirse $\psi(x,t)=e^{i\omega t}\chi(x)$, con lo cual la

*Investigador del CONICET

ecuación de Dirac, da lugar a un par de ecuaciones de movimiento acopladas para los componentes del espinor.

$$\left(\partial_x - V\right)\chi_1 = -i\omega\chi_2$$

$$\left(\partial_x + V\right)\chi_2 = -i\omega\chi_2$$

que pueden reducirse a un par de ecuaciones de Shrödinger unidimensionales desacopladas

$$\left[-\partial_x^2 + \left(V'^{\pm} V^2\right)\right]\chi_i = \omega^2\chi_i \quad (i=1,2) \tag{4}$$

Los operadores correspondientes pueden considerarse como las componentes de un hamiltoniano supersimétrico:

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} QQ^+ & 0 \\ 0 & Q^+Q \end{pmatrix} \tag{5}$$

donde las cargas *SUSY* son

$$Q = -i\left(\partial_x - V\right) \tag{6}$$

$$Q^+ = -i\left(\partial_x + V\right) \tag{7}$$

Así, estas ecuaciones de Schrödinger corresponden a un par de sistemas isoespectrales, salvo el estado base con $\omega = 0$.

III. CONDICIONES DE SOLUBILIDAD

En esta sección discutiremos las condiciones que debe satisfacer la ecuación de Dirac para ser resoluble aprovechando el mapeo en un hamiltoniano *SUSY* con componentes tipo Schrödinger. Dado un hamiltoniano *SUSY*, como (5), es posible generar a partir de él una cadena de hamiltonianos *SUSY*, tal que la cardinalidad de esta familia es la dimensión del espacio de Hilbert discreto del primer hamiltoniano. Si además, se verifica invariancia de forma supersimétrica, el problema es exactamente resoluble[2].

El espinor correspondiente al estado base está dado por:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

con χ_1^0 tal que es aniquilado por Q y $V(x)$ es directamente la derivada logarítmica de χ_1^0

$$\chi_1^0(x) \,\alpha\, \exp\int_x dy\, V(y). \tag{9}$$

Tomando la primera componente H, $\frac{1}{2}QQ^\dagger$, y escribiendo en general

$$\chi_1 \,\alpha\, \exp\int_x dy\, g(y) \tag{10}$$

se obtiene la ecuación de Riccati:

$$g^2(x) + g'(x) = V^2(x) + V'(x) - \omega^2 \tag{11}$$

Si el potencial $V(x)$ admite estados ligados, χ_1^n correspondiente al n-ésimo estado excitado tiene n ceros simples $\{x_j\}$ sobre el dominio físico en el eje x:

$$g_n(x) = \overline{g}(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - x_j} \tag{12}$$

donde $\overline{g}(x)$ es regular en el dominio físico. De aquí se deduce la ecuación

$$\overline{g}^2 + \overline{g}' + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\overline{g}(x) - \overline{g}(x_j)}{x - x_j} = V^2(x) + V'(x) - \omega^2 \tag{13}$$

donde debe satisfacerse:

$$\overline{g}\left(x_j\right) = \sum_{k=1,\, k\neq j}^{n} \frac{1}{x_k - x_j}. \tag{14}$$

Este sistema de ecuaciones, dado un cierto $\overline{g}$, puede tener más de una solución. Si es así, el tipo de solubilidad del potencial se manifiesta por la estructura de

$$\sum\nolimits_j^n \frac{\overline{g}(x) - \overline{g}(x_j)}{x - x_j}$$

Si esta expresión evaluada en las distintas soluciones da lugar a expresiones que difieren en su dependencia en x, cada solución corresponde a un potencial distinto y estamos ante un caso de los denominados parcialmente solubles. En cambio, si difieren sólo en una constante aditiva, todas las soluciones corresponden a un mismo potencial, pero a diferentes valores de ω, y por lo tanto, el hamiltoniano es cuasi-exactamente soluble. Finalmente, si para cada valor de n existe sólo una solución, estamos ante un hamiltoniano exactamente soluble.

IV. ALGUNAS APLICACIONES

En esta sección vamos a considerar a título de ejemplo dos conjuntos de potenciales en el contexto de la ecuación de Schrödinger.

A - POTENCIALES POLINÓMICOS

Están definidos por la expresión:

$$V_N(x)=\sum_{n=1}^{N} a_n x^n \tag{15}$$

En esta familia, el único miembro que cumple con la condición de resolubilidad exacta es el lineal:

$$V_1(x)=a_0+a_1 x \tag{16}$$

para el cual

$$V^2 \pm V'=\left(a_0^2 \pm a_1\right)+2a_0 a_1 x+a_1^2 x^2 \tag{17}$$

Aquí es trivial observar que ambos potenciales son isoespectrales. El autoestado de energía nula es:

$$\chi_1^0(x)=\begin{pmatrix} \exp\left[-\frac{a_1}{2}x^2+a_0 x\right] \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

La condición de normalizabilidad exige $a_1>0$.

Los potenciales cuasi-exactamente solubles de esta familia ($N>1$ con $a_N>0$) tienen como función de onda para el estado base:

$$\chi_1^0(x)=\begin{pmatrix} \exp\left[-\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}\right] \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

B - POTENCIABLES MAPEABLES EN POLINÓMICOS

Al método basado en la derivada logarítmica se lo puede extender a potenciales más generales utilizando transformaciones de coordenadas que permitan reescribirlos como tales[4-5]. En este apartado, nos restringiremos a los reducibles a un polinomio mediante un mapeo exponencial:[4] $u=e^{\alpha x}$, con $0<u<\infty$. Considerando:

$$V=\sum_{n=-L}^{N} a_n u^n \tag{20}$$

tenemos:

$$\frac{dV}{dx}=\frac{du}{dx}\frac{dV}{du}=\alpha u\frac{dV}{du}, \tag{21}$$

y la ecuación de Riccati que ahora debe satisfacer, en lugar de (18), es:

$$V^2+\alpha u V'=(\alpha u)^2\left[\bar{g}^2(u)+\bar{g}'(u)+\alpha^2 u+2\alpha u \sum_{j=-L}^{N}\frac{\bar{g}(u)-\bar{g}(u_j)}{u-u_j}\right]+\omega^2 \tag{22}$$

donde el único miembro de esta clase que es exactamente soluble tiene a $L=1$, tal que los potenciales $U_\pm$ corresponden a potenciales de Morse. Los restantes son potenciales cuasi-exactamente solubles.

C - ELECTRONES RELATIVISTAS EN UN CRISTAL UNIDIMENSIONAL

En esta sección presentamos otro ejemplo basado en resultados presentados en un artículo anterior[6]. Consideramos el potencial unidimensional cuadriparamétrico

$$V=U+m=a\,ctg(x)+b\,tg(x)+c\,cos(x)\,sen(x), \tag{23}$$

donde los parámetros a, b, c, y m definen el potencial que aparece en la ecuación de Dirac (1), que ahora puede interpretarse como la ecuación para un fermión con masa m, con un término de interacción dado por U. Si definimos $U_{sh}=U^2-U'$, con $U=V-m$, nuestro potencial para la ecuación de Schrödinger será:

$$U_{sh}=U^2-U'=\frac{a(a-1)}{sen^2(x)}+\frac{b(b+1)}{cos^2(x)}-\frac{c^2}{4}cos^2(x)+$$

$$\left[\frac{c^2}{4}+c(a+b)-(a-b)^2\right]. \tag{24}$$

Si $a(a-1)$ y $b(b-1)$ son ambos no positivos, la ecuación de Schrödinger correspondiente, tiene soluciones de Bloch con parámetros de red 2 o 1, según $ab(a-1)(b-1)$ sea igual o distinto de cero respectivamente, y los bordes de banda están dados por [6]:

$$\psi(x)\ \alpha\ sen^{a/2}(x)\ cos^{b/2}(x)\ e^{cu/4}\ {}_2F_1\ [-n,n+a+b;$$

$$a+\tfrac{1}{2};\ sen^2(x)], \tag{25}$$

con energías:

$$E=(2n+a+b)^2, \tag{26}$$

que como se observa no presenta dependencia de la masa.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos planteado la relación entre la ecuación de Dirac y la ecuación de Schrödinger en $d=1+1$. Las soluciones estacionarias de la ecuación de Dirac con energía ω, satisfacen un par de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. Al desacoplarlas se genera un sistema isoespectral de dos ecuaciones de segundo orden, formado por ecuaciones de Schrödinger con autovalor ω^2. En esta forma el hamiltoniano de Dirac se mapea en un hamiltoniano supersimétrico. A partir de aquí, se hace evidente que en esta dimensión, las diversas técnicas de análisis desarrolladas en Mecánica Cuántica, pueden extenderse con facilidad a espinores relativistas. Como aplicación de estos resultados hemos considerado potenciales polinómicos y mapeables en ellos por medio de una transformación adecuada, y en particular, un modelo cuasi-exactamente soluble para un fermión en un cristal unidimensional.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado con el apoyo parcial del CONICET.

REFERENCIAS

1. L. Infeld y T. D. Hull. Rev. Mod. Phys. **23**, 21 (1951).
2. L. E. Gedenstein. Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **38**, 229 (1983) JETP Lett. 38, 356 (1983); R. Montemayor y L. Salem. Phys. Rev. **A40**, 2170 (1989).
3. L. Salem y R. Montemayor. Phys. Rev. **A43**, 1169 (1991).
4. R. Montemayor y L. Salem. Phys. Rev. **A44**, 7037 (1991).
5. L. Salem y R. Montemayor. Phys. Rev. **A47**, 105 (1993).
6. L. Salem y R. Montemayor. Phys. Rev. **A44**, 7065 (1991).