PARTÍCULAS DE DIRAC EN CAMPOS GRAVITATORIOS

H. Casini y R. Montemayor

Instituto Balseiro, UNC Centro Atómico Bariloche, CNEA 8400 S.C. de Bariloche, Río Negro

Se analiza la propagación de partículas de Dirac en presencia de campos gravitatorios débiles. Estudiamos las transiciones de helicidad y quiralidad, y en particular establecemos una cota superior para estas últimas considerando el efecto de un agujero negro con máximo momento angular (métrica extrema de Kerr-Newman)

I. INTRODUCCIÓN

La interacción de diversas partículas con campos gravitatorios da información sobre la distribución de masa y momento angular de objetos astronómicos. En este sentido pueden ser muy relevantes los neutrinos ya que sólo interactúan débilmente, y si bien su baja sección eficaz los hace de difícil detección, es ésta propiedad la que les otorga mayor interés porque nos traen información directa del lugar de origen.

Por ello analizamos la propagación de espinores en campos gravitatorios. Dado que no existe una teoría cuántica para la gravitación, tomamos como punto de partida una aproximación semiclásica en la cual el campo gravitatorio es un campo clásico de fondo sobre el que evolucionan los espinares y así el formalismo se reduce a una teoría de campos en espacio curvo. La ecuación de Dirac en un espacio curvo es [1]:

$$\left[i\gamma^{\mu}(x)D_{\mu}-m\right]\psi=0, \tag{1}$$

donde $D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$ es la derivada covariante para un campo de espín 1/2, y la conexión de espín es $\Gamma_\mu = -(1/4)\, e_a^{\nu}\, e_{\nu b;\mu}\, \sigma^{ab}$. La tétrada e_a^{ν} está definida por

$$g^{\mu\nu}=e_a^{\nu}e_b^{\mu}\eta^{ab}, \tag{2}$$

$\sigma^{ab}=\frac{i}{2}\left[\gamma^a,\gamma^b\right]$ es el tensor de espín; η^{ab} γ^a son el tensor métrico y las matrices de Dirac en espacio de Minkowski respectivamente y $e_{\nu b;\mu}$ es la derivada covariante de la tétrada.

El producto escalar definido positivo para las soluciones de la ecuación de Dirac en espacio curvo está dado por $(\Psi_1,\Psi_2) = i\int_\Sigma \overline{\Psi}_1\gamma^\mu\Psi_2\sqrt{-g}\,d\Sigma_\mu$, donde Σ es una hipersuperficie tipo espacio.

A partir de la ecuación (1) podemos derivar la expresión para el hamiltoniano de Dirac en presencia de un campo gravitatorio:

$$H=\frac{1}{g^{00}}\gamma^a\, e_a^0\left[m-i\,\gamma^b\, e_b^i\left(\partial_i+\Gamma_i\right)\right]-i\Gamma_0 \tag{3}$$

En la mayoría de sus aplicaciones a astrofísica, el campo gravitatorio es débil y por lo tanto vamos a considerar una aproximación lineal, donde:

$$g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}+h^{\mu\nu} \quad , \quad e_a^{\mu}=\eta_a^{\mu}+\omega_a^{\mu}. \tag{4}$$

A partir de (2) se expresan las componentes de ω_a^{μ} en términos de las $h_{\mu\nu}$.

Redefiniendo Ψ, para que el producto escalar sea el usual del espacio plano, resulta un hamiltoniano hermético con la medida d^3x y lineal en $h_{\mu\nu}$. Por simplicidad sólo considerararemos el caso en que es aplicable la aproximación postnewtoniana a los potenciales gravitatorios [2]:

$$h_{00}=2\phi \quad , \quad h_{ij}=2\delta_{ij}\phi \quad , \quad h_{i0}=h_{0i}=h_i . \tag{5}$$

Reemplazando en (3), el hamiltoniano queda:

$$H=\gamma^0 m(1+\phi)+\vec{\alpha}.\vec{p}+\{\phi,\vec{\alpha}.\vec{p}\}+\frac{1}{2}\{\vec{h},\vec{p}\}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{h}\,\vec{s}\,. \tag{6}$$

Con la transformación de Foldy-Wouthuysen[3] obtenemos el límite de bajas velocidades. A orden $(\upsilon/c)^2$ y despreciando términos de orden $(1/L)^2$, donde L es la longitud en la que varían los campos gravitatorios, el hamiltoniano es:

$$H_{FW}=\frac{(1+3\phi)}{2m}\left(\vec{p}+m\vec{h}\right)^2+m\phi+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times$$

$$\times\vec{h}.\vec{s}-\frac{3}{2m}\left(\vec{s}\times\vec{\nabla}\phi+i\vec{\nabla}\phi\right).\vec{p}. \qquad (7)$$

Su interpretación física es sencilla. El primer término representa la energía cinética afectada por el factor $(1+3\phi)$ que corresponde al corrimiento hacia el rojo por el campo gravitatorio. El segundo término, es la energía potencial gravitatoria. El impulso generalizado será $\vec{p}+m\vec{h}$ y al igual que su equivalente electromagnético dará origen a un efecto Bohm-Aharonov [4]. El tercer término del hamiltoniano es similar al que acopla el espín al campo magnético excepto por el factor girogravitatorio que es 1, porque el efecto de la gravedad es puramente geométrico y sólo toma en cuenta la naturaleza vectorial del espín y el momento angular orbital. Por último el cuarto término corresponde al acoplamiento espín-órbita.

Análogamente con una transformación de Cini-Touschec [5] construimos el hamiltoniano en el límite ultrarrelativista, que a orden (m/p) y despreciando términos de orden $(\lambda/L)^2$ es:

$$H_{CT}=\vec{\alpha}.\vec{p}+\{\phi,\vec{\alpha}.\vec{p}\}+\frac{1}{2}\{\vec{h},\vec{p}\}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{h}.\vec{s}+$$

$$+i\frac{m}{2}\left\{\frac{1}{2}\gamma^0\left[h_{i,j}+h_{j,i}\right]\left[\frac{\alpha^i p^j}{p^2}-2\frac{p^i p^j}{p^4}\vec{\alpha}.\vec{p}\right]+\right.$$

$$\left.+i\sigma^{ij}\phi_{,j}\frac{p^i}{p^2}+\gamma^0\dot{\phi}\frac{\vec{\alpha}.\vec{p}}{p^2}\right\} \qquad (8)$$

Una observación interesante se refiere a la velocidad de propagación de las partículas. El operador velocidad es:

$$\dot{\vec{r}}=\left[\vec{r},H\right]=(1+2\phi)\,\vec{\alpha}+\vec{h} \qquad (9)$$

El campo gravitatorio da lugar a dos contribuciones: una que sólo altera el módulo de la velocidad, debida a ϕ, y otra, que cambia su módulo y dirección, por acción de $\vec{h}$, e introduce una anisotropía en la propagación de partículas y antipartículas.

II. NEUTRINOS EN CAMPOS GRAVITATORIOS

Los neutrinos son partículas de masa muy pequeña o nula, pero en todo caso ultrarrelativistas, y son detectadas sólo en un estado de quiralidad. Surge entonces naturalmente la cuestión de si existe un posible cambio de quiralidad debido a interacciones con el campo gravitatorio. En la literatura las opiniones sobre este tema son encontradas [7,8].

Si la masa es nula las ecuaciones de movimiento para las componentes de distinta quiralidad se desacoplan y no hay transición de quiralidad. No sucede así con la helicidad $(\vec{s}.\vec{p})/p$, que por lo tanto no guarda la misma relación con la quiralidad que tendría en espacio de Minkowski.

Para ver que sucede si $m\neq 0$ consideremos un neutrino con energía E > 0. Entonces

$$\frac{d}{dt}<\gamma^5>=i<\left[H,\gamma^5\right]>=2im<\gamma^0\gamma^5(1+\phi)>. \qquad (10)$$

Esta expresión es similar a la que se obtiene en espacio plano, excepto por el potencial gravitatorio. Pero la diferencia fundamental es que allí el valor medio de $\gamma^0\gamma^5$ es nulo entre estados de energía positiva porque este operador anticonmuta con el hamiltoniano. En cambio en espacio curvo esto no es así y la violación de quiralidad es un efecto proporcional al campo gravitatorio. La razón de cambio del valor medio de γ^5 es:

$$\frac{d}{dt}<\gamma^5>\cong-\frac{m}{2E^2}<\gamma^5\gamma^0\left[\left(h_{i,j}+h_{j,i}\right)\alpha^i p^j+\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2}\sigma^{ij}\phi_{,j}\,p^i\right]>. \qquad (11)$$

La expresión entre corchetes aparece en el hamiltoniano de Cini-Touschek como término no conmutante con γ^5.

A continuación aplicaremos estos resultados en tres situaciones diferentes.

1.- Sistema de referencia en rotación

La métrica de un espacio plano vista desde un sistema de referencia en rotación está dada por:

$$h_{00} = (\vec{\omega}.\vec{r})^2 - \omega^2 r^2 \quad , \quad \vec{h} = \vec{r} \times \vec{\omega}, \tag{12}$$

y a primer orden en $h_{\mu\nu}$ el hamiltoniano es:

$$H = m\gamma^0 + \vec{\alpha}.\vec{p} - \vec{\omega}.\vec{L} - \vec{\omega}.\vec{s} = m\gamma^0 + \vec{\alpha}.\vec{p} - \vec{\omega}.\vec{j} \tag{13}$$

El término $-\vec{\omega}.\vec{L}$ es el responsable del efecto Sagnac [6]. El hamiltoniano conmuta con el operador de helicidad por lo que ésta se conserva, como corresponde a un espacio plano. Por el análisis de la sección precedente podemos concluir que como $h_{i,j}$ es antisimétrico no hay cambio de quiralidad para los neutrinos en este sistema de referencia. De echo un simple cambio de coordenadas no puede hacer que partículas que antes interactuaban dejen de hacerlo.

2.- Distribución esférica de masa en reposo

En este caso podemos tomar:

$$\phi = -\frac{M}{r} \quad , \quad \vec{h} = 0. \tag{14}$$

El cambio de quiralidad lo obtenemos de:

$$\frac{d}{dt} < \gamma^5 > = \frac{imM}{2E^2} < \gamma^5\gamma^0 \frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{p}.\vec{s} > . \tag{15}$$

$\vec{p}$ y $\vec{s}$ son paralelos a orden *m/p*, por lo que la amplitud de transición entre estados de quiralidad opuesta es nula, lo que es razonable pues al haber simetría esférica en el sistema no hay posibilidad de violar paridad. Más generalmente el mismo argumento nos indica que no hay cambio de quiralidad a este orden si $\vec{h} = 0$.

3.- Distribución esférica de masa en rotación

El campo gravitatorio producido por una distribución de masa con simetría esférica en rotación es:

$$\phi = -\frac{M}{r} \quad , \quad \vec{h} = 2\vec{J} \times \frac{\vec{r}}{r^3}, \tag{16}$$

donde $\vec{J}$ es el momento angular del sistema. No tomaremos en cuenta a ϕ ya que como vimos su contribución es nula. El término que produce violación de quiralidad es en este caso:

$$\frac{d}{dt} < \gamma^5 > = 3\frac{m}{E^2} < \frac{\gamma^5\gamma^0}{r^5}\left[(\vec{r}.\vec{\alpha})\left(\vec{J}\times\vec{r}.\vec{p}\right) + \left(\vec{J}\times\vec{r}.\vec{\alpha}\right)(\vec{r}.\vec{p})\right] > . \tag{17}$$

Consideraremos dos casos según la orientación relativa del impulso de la partícula con respecto al momento angular de la distribución de masa. En ambos casos la trayectoria del neutrino se considera tangente al ecuador de la distribución de masa.

a) $\vec{p} \parallel \vec{J}$

Integrando el efecto del campo gravitatorio desde $r = a$ hasta $r = \infty$ (*a* es el radio de la distribución de masa) tenemos que el cociente entre las amplitudes de quiralidad negativa y positiva es:

$$\Delta_{\parallel} = \frac{2m\vec{J}}{Ea^2} = \frac{4}{5}\frac{MG}{c^3}\left(\frac{mc^2}{E}\right)\omega. \tag{18}$$

Este efecto es impar, es decir, si el neutrino se propaga desde $-\infty$ hasta $+\infty$ tangencialmente a la masa y paralelo a su momento angular la contribución debida al trayecto desde $-\infty$ a 0 cancela exactamente a la debida al trayecto dese 0 a $+\infty$.

b) $\vec{p} \perp \vec{J}$

En este caso resulta:

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{2}\Delta_{\parallel} \tag{19}$$

pero a diferencia del caso anterior el efecto es par: la propagación desde $-\infty$ hasta $+\infty$ tangente a la distribución de masa y ortogonal a $\vec{J}$ da una contribución no nula, igual a $\Delta_{\parallel}$.

III. CONCLUSIONES

El hamiltoniano (3) conmuta con el operador helicidad si éste es correctamente definido a partir del operador de Pauli-Lubansky covariante bajo transformaciones de coordenadas en el espacio curvo. Si consideramos el hamiltoniano linealizado (6) y el operador de helicidad tal como se define en espacio plano vemos que no conmutan. Esto puede llevar a la falsa conclusión de que existe una transición de helicidad en presencia de campo gravitatorio, pero este es un efecto debido únicamente a la relación que existe entre el espacio curvo y el espacio plano asociado localmente y es compensado si se introducen las correcciones lineales al operador de helicidad en espacio plano que vienen de la definición covariante. En particular esto explica la diferencia entre nuestros resultados y los de Cai y Papini[7], y es consistente con la crítica que les planteó Anandan[8].

Por otro lado si desarrollamos el campo $\vec{h}$ en torno a un punto:

$$h_i = h_i|_{\vec{x}_0} + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{h}|_{\vec{x}_0}\times(\vec{x}-\vec{x}_0)\right)_i + \frac{1}{2}\left(h_{j,i}+h_{i,j}\right)\left(x^j - x_0^j\right), \tag{20}$$

se observa que consiste en un término similar al de una rotación pura alrededor del punto x_0, que no produce transición de quiralidad, más un término simétrico que se anula en el caso de una rotación pura y que es el responsable de los cambios de quiralidad dados por la ecuación (11). Anandan sólo considera el primer término en su argumento y por ello concluye que no hay cambios de quiralidad.

Para finalizar, podemos estimar una cota superior para la transición de quiralidad considerando como fuente del campo gravitatorio un agujero negro con velocidad de rotación máxima (métrica extrema de Kerr-Newman)[9], a pesar de que en este caso no es válida la aproximación lineal. Este sistema está caracterizado por $(J/a^2)=1$, con lo cual:

$$\Delta \sim \frac{m}{E}, \tag{21}$$

lo que muestra claramente que este efecto es muy pequeño si $m \neq 0$, y nulo si $m = 0$.

REFERENCIAS

1. H.Pagels, Ann. Phys. (NY) **31**, 64 (1965). N.D.Birrell and P.C.W.Davies,*Quantum Fields in Curved Spaces* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
2. S.Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).
3. J.D.Bjorken and S.D.Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGrawHill, New York, 1965).
4. G.Papini, Nuovo Cim. **52B**, 136 (1967).
5. M.Cini and B.Touschek, Nuovo Cim. **7**, 422 (1958).
6. G.Sagnac, Compt. Rend. **157**, 708, 1410 (1913).
7. Y.Q.Cai and G.Papini, Phys. Rev. Lett. **66**, 1259 (1991).
8. J.Anandan, Phys. Rev. Lett. **68**, 3809 (1992).
9. C.W.Misner, K.S.Thorne and J.A.Wheeler, *Gravitation* (W.H.Freeman, San Francisco, 1970).

CEILAP
CITEFA - CONICET
ZUFRIATEGUI Y VARELA
1603 - VILLA MARTELLI
REPUBLICA ARGENTINA