

EFFECTO DE LA ASIMETRÍA EN LAS CONDICIONES DE CONTORNO SOBRE LA FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS ESTACIONARIAS EN UN MODELO DE INESTABILIDAD ELECTROTÉRMICA

H. S. Wio,*

División Teórica, Centro Atómico Bariloche (8400) S.C. de Bariloche.

G. Izús**, O. Ramírez, R. Deza,

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Mar del Plata, Deán Funes 3350 (7600) Mar del Plata.

C. Borzi*

Comisión Nacional de Energía Atómica, Avenida del Libertador 8250 (1429) Buenos Aires.

En un sistema reacción-difusión unicomponente unidimensional (el *resistor de balasto*), se analiza el efecto de imponer condiciones de contorno asimétricas. Se presta particular atención a la forma, simetría y estabilidad de los patrones estacionarios.

In a one-component, one-dimensional reaction-diffusion system (the *ballast resistor*), the effect on stationary pattern formation of imposing asymmetric boundary conditions is studied. Particular attention is paid to the form, symmetry and stability of stationary patterns.

I. INTRODUCCION

La formación y propagación de estructuras disipativas en sistemas no lineales fuera del equilibrio es uno de los grandes problemas de la física de los sistemas complejos. La aproximación de *reacción-difusión* (RD) ha demostrado ser de gran utilidad, en particular para el análisis de estructuras localizadas (ya sea en geometría finita como infinita).^{1,2} Los sistemas RD han resultado una fuente extraordinariamente rica de modelos en todas las ciencias -Sociología, Ecología, Química, Biología, Física, etc.- permitiendo la descripción de relojes químicos (reacción de Belousov-Zhabotinski), de la propagación de impulsos en los axones, o de la actividad periódica y espacialmente organizada del tejido cardíaco, entre otros.^{2,6} En el caso de geometría finita se sabe^{3,6} que las condiciones de contorno juegan un rol fundamental en la formación y estabilidad de las estructuras estacionarias. En general, y debido a la complejidad de las ecuaciones que des-

criben a estos sistemas, se hace necesario recurrir a métodos numéricos: de aquí la importancia de contar con modelos simples pero exactamente solubles, que retengan las características esenciales del problema permitiendo su análisis exhaustivo. Las condiciones de contorno generalmente utilizadas en el análisis de sistemas finitos son las de Dirichlet y las de Neumann, que corresponden físicamente a los casos de absorción total y reflexión total, respectivamente. Existe sin embargo una situación intermedia que permite modelar en forma realista la interacción del sistema con su entorno: las condiciones de *albedo*.^{7,8} En este trabajo analizamos el efecto de imponer condiciones de contorno asimétricas en un sistema unidimensional y monocomponente del tipo RD -el *resistor de balasto*.^{9,10} utilizado como modelo para el estudio de inestabilidades electrotérmicas en micropuentes superconductores: en el extremo izquierdo imponemos una condición fija (Neumann o Dirichlet), y se estudia la formación y estabilidad de estructuras con dos regiones (desactivada a la

* Investigador del CONICET

** Becario del CONICET (Perfeccionamiento)

izquierda, activada a la derecha) y tres (activada central) como función del parámetro de albedo k , correspondiente a las c.c. impuestas en el extremo derecho.

II. EL MODELO Y SU ANÁLISIS

Luego de una adecuada adimensionalización, la ecuación de evolución para la temperatura del sistema puede ser escrita en la forma: ¹⁰

$$T_\tau(z, \tau) = T_{zz}(z, \tau) - T(z, \tau) + T_h \theta |T(z, \tau) - T_c|, \quad (1)$$

donde T_h mide -en unidades de temperatura- la relación entre el calor Joule generado y la capacidad de transferencia al baño térmico, y $\theta(x)$ es la función escalón de Heaviside. El sistema está definido en la región $-z_L < z < z_L$. En el extremo derecho (z_L), la condición de contorno es siempre de *albedo*:

$$T_z|_{z_L} = -kT(z_L) \quad (2)$$

en tanto que en el extremo izquierdo son Dirichlet ($T_z|_{-z_L} = 0$) o de Neumann $T_{z|-z_L} = 0$.

De la ec. (1) surge que dos situaciones son posibles: que el sistema esté *activado* ($T > T_c$) o *desactivado* ($T < T_c$). Como se discute en la Ref.7, dividimos el intervalo $-z_L < z < z_L$ en regiones activadas y desactivadas de modo que en cada región el problema a resolver es lineal, obtenemos (en el caso estacionario $T_\tau = 0$) diferentes formas analíticas para

la solución en cada región, y determinamos la solución global por el requerimiento que en las fronteras entre regiones (que llamaremos genéricamente z_c) sea $T(z_c) = T_c$. Este requerimiento es adicional -por supuesto- a las condiciones de contorno y al de diferenciabilidad de la solución en los puntos z_c , y comporta una relación implícita entre z_c y el parámetro de albedo k , una ecuación trascendente que (salvo en casos excepcionales) debe ser resuelta numéricamente. Puede suceder que para un dado valor de k exista más de una raíz de $T(z_c) = T_c$; en estos casos es la estabilidad de los patrones la que selecciona el valor de z_c .

III. ESTRUCTURAS ESTACIONARIAS

Los casos analizados en el presente trabajo son:

- a) Un patrón con dos regiones (la activada a la derecha) y condiciones de Neumann en $-z_L$.
- b) Un patrón con dos regiones (la activada a la derecha) y condiciones de Dirichlet en $-z_L$.
- c) Un patrón con tres regiones (la activada es la central) y condiciones de Neumann en $-z_L$.
- d) Un patrón con tres regiones (la activada es la central) y condiciones de Dirichlet en $-z_L$.

En los casos (c) y (d) llamamos respectivamente z_{c1} y z_{c2} a los bordes izquierdo y derecho de la región central. En las Figs. 1 y 3 graficamos -para los casos (a) y (b) respectivamente- z_c como función del parámetro de albedo k para $z_L = 2$ y para dis-

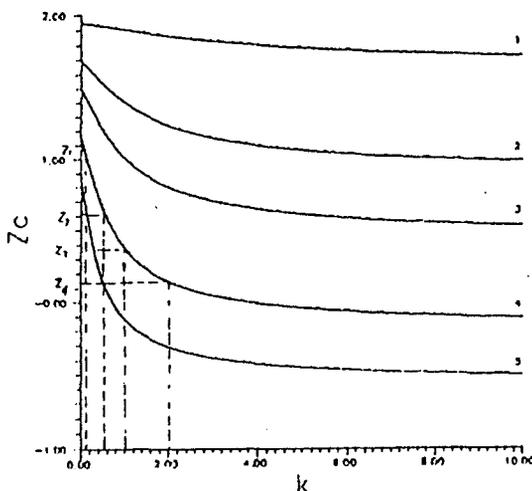


Fig. 1: z_c vs. k para el caso a: $T_c/T_h = 0,045$ (curva 1), $0,225$ (curva 2), $0,315$ (curva 3), $0,405$ (curva 4) y $0,45$ (curva 5).

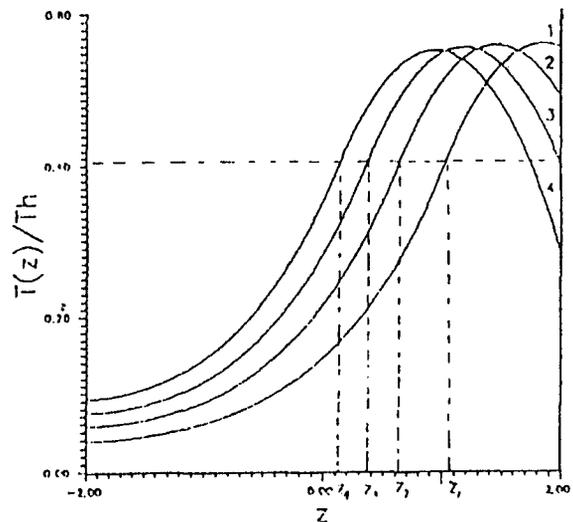


Fig. 2: Patrones $T(z)$ en el caso a ($T_c/T_h = 0,405$): $k=0,11$ (curva 1), $0,5$ (curva 2), 1 (curva 3), 2 (curva 4).

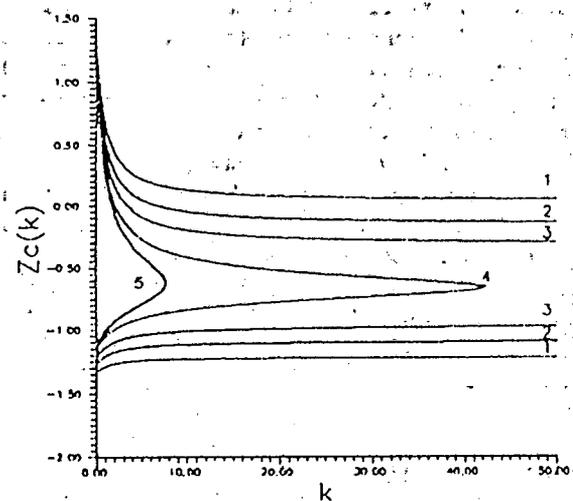


Fig. 3: z_c vs. k para el caso b: $T_c/T_h=0,365$ (curva 1), $0,382$ (curva 2), $0,393$ (curva 3), $0,404$ (curva 4), y $0,41$ (curva 5).

tintos valores de la relación T_c/T_h . En las Figs. 2 y 4 se muestra la forma de los patrones correspondientes. Lo mismo sucede en las Figs. 5 y 7 y las Figs. 6 y 8 para los casos (c) y (d). Por tratarse de condiciones de contorno asimétricas, no sorprende que los patrones lo sean. De la inspección de dichas Figs. surgen algunas observaciones:

- En los casos (a) y (c) existe una sola rama para cada valor de T_c/T_h , mientras que en los ca-

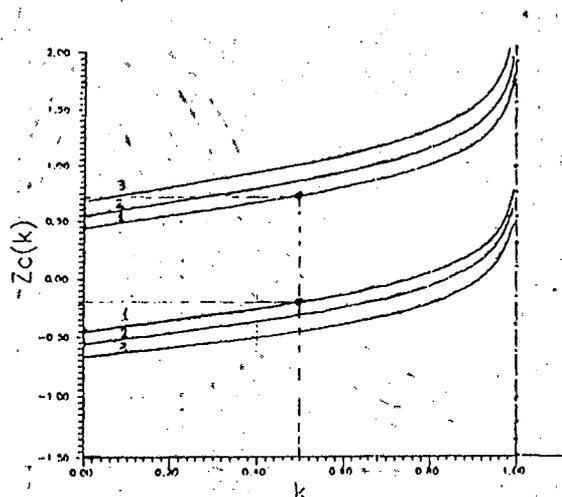


Fig. 5: z_c vs. k para el caso c: $T_c/T_h = 0,315$ (curvas 1), $0,36$ (curva 2) y $0,405$ (curvas 3) (la inferior es z_{c1} y la superior es z_{c2}).

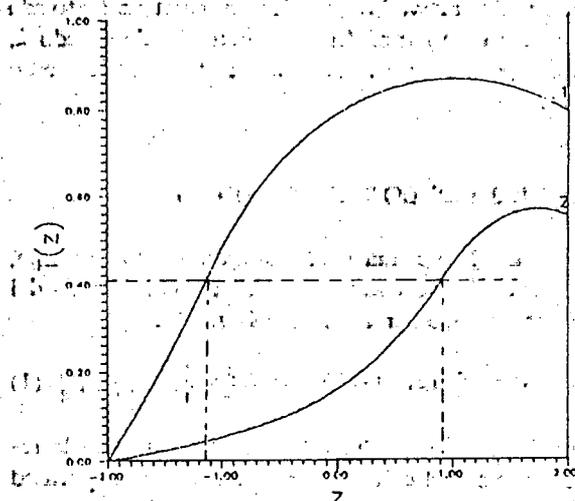


Fig. 4: Patrones $T(z)$ en el caso b ($T_c/T_h = 0,404$ $k = 0,2$): la curva 1 (respectivamente 2) corresponde al menor (mayor) valor de z_c .

sos (b) y (d) existen dos.

- La similitud entre las curvas 3 y 4 de la Fig. 2 y la curva 3 de la Fig. 6 -a pesar del diferente comportamiento de z_c vs. k en los casos (a) y (c) -obedece al hecho que, a medida que k crece, la c.c. en el borde derecho tiende a la de Dirichlet (que por supuesto no es compatible con el caso (a), en el que la región activada llega hasta el borde derecho). La

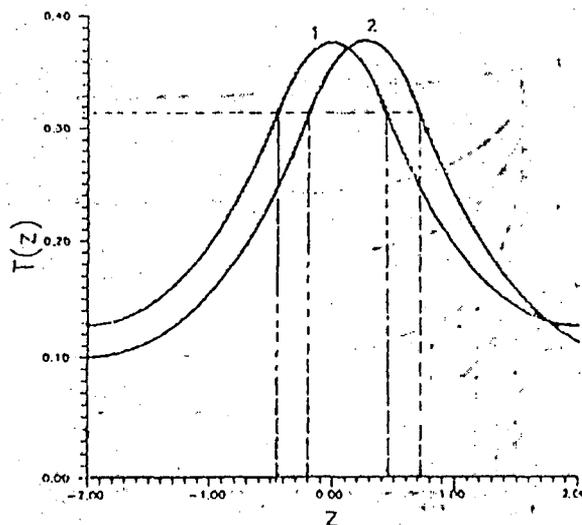


Fig. 6: Patrones $T(z)$ en el caso c ($T_c/T_h = 0,315$): $k=0$ (curva 1) y $0,5$ (curva 2).

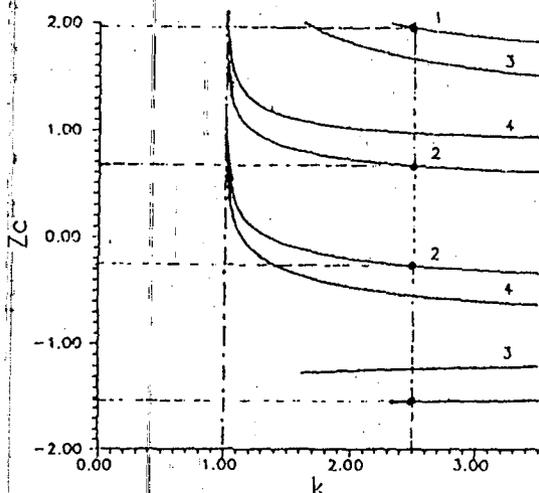


Fig. 7: z_c vs. k para el caso d: $T_c/T_h = 0,29$ (curvas 1 y 2) y $0,315$ (curvas 3 y 4) (las curvas pares corresponden a la rama inferior).

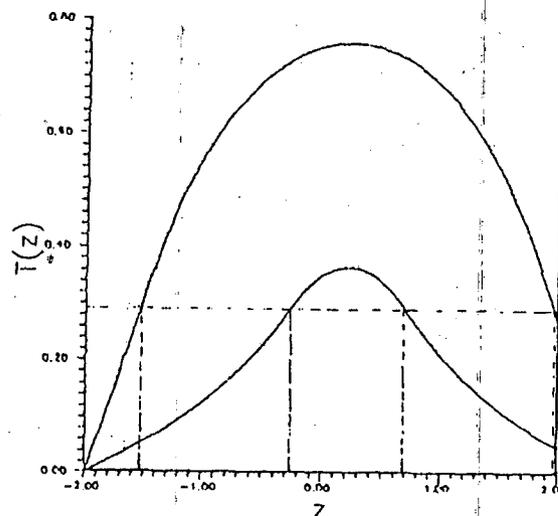


Fig. 8: Patrones $T(z)$ en el caso d ($T_c/T_h = 0,29$; $k = 2,5$): la curva 1 (resp.2) corresponde a la rama 1 (resp.2) de la Fig.7.

situación se repite entre los casos (b) y (d) cuando se eligen valores similares de k .

- La divergencia de las curvas de la Fig. 5 al crecer k y de las de la Fig. 7 al disminuir k muestra la inexistencia de patrones con una región central activada y condiciones de Dirichlet en un extremo y de Neumann en el otro.

IV. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD LINEAL

El análisis de estabilidad lineal de los patrones es similar al realizado en la Ref.7. Los resultados, caso por caso, son los siguientes:

- Todos los patrones son inestables.
- Hasta $T_c/T_h \approx 0,27$ los patrones cuyos z_c corresponde a la rama superior son estables para todo valor de k ; para $T_c/T_h \approx 0,28$ son estables sólo para $k \leq 1,4$; para valores mayores de T_c/T_h (así como para la rama inferior de los anteriores) son inestables, para todo k .
- Se investigó para los valores de T_c/T_h de la Fig. 5, resultando los patrones inestables en el intervalo $0 \leq k \leq 1$.
- Los patrones con menor z_{c1} y mayor z_{c2} son estables para todo k hasta $T_c/T_h \approx 0,33$, en tanto que los internos son inestables; para valores mayores de T_c/T_h son todos inestables.

V. CONCLUSIONES

En algunos de los casos estudiados se reconocen situaciones ya encontradas al analizar otros sistemas y/o c.c.⁷⁻⁸ (similaridad en las curvas de z_c vs. k y en los criterios de estabilidad). Los resultados confirman una vez más el rol determinante de las c.c. sobre la estabilidad de los patrones estacionarios, y sugieren la utilización de medios con reflectividad (o absorptividad) parcial como parámetros de control que seleccionen dichas estructuras.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado con apoyo parcial del CONICET.

REFERENCIAS

- a) P. C. Hohenberg y M. C. Cross. *An Introduction to Pattern Formation in Nonequilibrium Systems, en Fluctuations and Stochastic Phenomena in Condensed Matter* (Lecture Notes in Physics No. 268), L. Garrido, ed; Spriger-Verlag (Berlin, 1987); b) P. C. Cross: *Theoretical Methods in Pattern Formation in Physics, Chemistry and Biology, en Far from Equilibrium Phase Transitions*, L. Garrido, ed; Springer-Verlag (Berlin, 1988).
- P. C. Fife. *Current Topics in Reaction-Diffusion Systems, en Nonequilibrium Cooperative Phenomena en Physics and Related Fields*, M.G.Velarde, ed; Plenum (NY, 1984)

3. *Evolution of Order and Chaos in Physics, Chemistry and Biology*, C.Vidal y A.Pacault, eds; (Synergetics v.17, H. Haken, ed); Springer-Verlag (Berlin, 1982).
4. J. P. Keener. SIAM J. Appl. Math. **39**, 528 (1980).
5. A.T.Winfree. *Stably Rotating Patterns of Reaction and Diffusion*: en *Theor. Chem.* v. 4, H. Eyring y D. Henderson, eds; Academic (New York, 1978).
6. C. Borzi y H. Wio. Phys. Lett. **160A**, 247 (1991).
7. a) C. Schat y H. S. Wio. Physica **A180**, 295 (1992); b) G. Izús, O. Ramírez, R. Deza, H. S. Wio y C. Schat: *An analytical example of pattern formation: the ballast resistor*, en preparación (a ser enviado a Am. J.Phys); c) J. M. Reyes de Rueda, G. Izús, O. Ramírez, R. Deza y H. S. Wio. *Estructuras anulares estacionarias en sistemas reacción-difusión con condiciones de contorno parcialmente reflectivas*, enviado a Anales AFA 5.
8. a) H. S. Wio, C. Borzi, G. Izús, O. Ramírez y R. Deza: Anales AFA **3**, 60 (1992); b) H.S.Wio, G.Izús, O. Ramírez, R. Deza y C. Borzi: J. Phys.A: Math.Gen **26**, 4281 (1993); c) H. S. Wio, G. Izús, O. Ramírez, R. Deza y C. Borzi. *Influencia de las condiciones de contorno de "albedo" sobre la formación de estructuras estacionarias en un modelo de conducción nerviosa*, enviado a Anales AFA 5.
9. a) L. Kramer y P. C. Hohenberg. Physica **D13**, 357 (1984); b) T. Ohta, A. Ito y A. Tetsuka: Phys. Rev. A **42**, 3225 (1990).
10. a) B. Ross y J. D. Lister. Phys. Rev. **A15**, 355 (1977); b) R. Landauer: Phys. Rev. **A15**, 2117 (1977); c) D. Bedeaux, P. Mazur y R. A. Pasmanter: Physica **A86**, 355 (1977).