DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES DESCONOCIDOS DE UN MATERIAL SEMI-INFINITO A TRAVÉS DE UN MODELO DE ZONA PASTOSA PARA EL PROBLEMA DE STEFAN A DOS FASES

A. M. González,
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta Nacional 8, km 601, (5800) Río Cuarto, Argentina.

D. A. Tarzia
Departamento . de Matemática, FCE, Universidad Austral, Paraguay 1950, (2000) Rosario, Argentina y PROMAR (CONICET- UNR), Instituto de Matemática "Beppo Levi", Avenida Pellegrini 250, (2000) Rosario, Argentina.

Se utiliza un modelo simple de zona pastosa para el problema de Stefan a dos fases, para determinar simultáneamente coeficientes térmicos desconocidos de un material semi-infinito a través de un proceso de conducción del calor con cambio de fase con una sobre-condición en el borde fijo x = 0. Se deducen fórmulas para los coeficientes desconocidos y se obtienen las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución.

We use a simple mushy zone model for the two-phase Stefan problem for the simultaneous determination of unknown coefficients of a semi-infinite material with an overspecified condition on the fixed face. We also find formulae for the unknown coefficients and the necessary and sufficient conditions for the existence of a solution.

I. INTRODUCCIÓN

Se considera un material semi-infinito (representado por $x > 0$) con densidades de masa iguales a $\rho > 0$ en ambas fases, sólida y líquida; se supone, sin pérdida de generalidad, que la temperatura de cambio de fase es de 0 °C. Si el material se supone inicialmente en estado líquido a una temperatura constante $E > 0$ y se impone una temperatura constante $-D < 0$ en el borde fijo $x = 0$, entonces pueden distinguirse tres regiones distintas (para una descripción matemática de este modelo simple y sus propiedades (ver Ref. 6); para el modelo a una fase (ver Ref. 3):

– (H_1) La fase líquida, a temperatura $\theta_2 = \theta_2(x,t) > 0$, ocupa la región $x > r(t)$, $t > 0$;
– (H_2) La fase sólida, a temperatura $\theta_1 = \theta_1(x,t) < 0$, ocupa la región $0 < x < s(t)$, $t > 0$;
– (H_3) La zona pastosa, a temperatura 0, ocupa la región $s(t) \leq x \leq r(t)$, $t > 0$. Se hacen dos suposiciones en esta zona :

(a) El material en la zona pastosa contiene una fracción fija εh (con $0 < \varepsilon < 1$) del total de calor latente $h > 0$, es decir

$$k_1\theta_{1_x}(s(t),t) - k_2\theta_{2_x}(r(t),t) = h\rho(\varepsilon\, \dot{s}(t) + (1-\varepsilon)\, \dot{r}(t)), \quad t>0; \tag{1}$$

(b) La longitud de la zona pastosa es inversamente proporcional (con constante $\gamma > 0$) al gradiente de temperatura en el punto ($s(t)$, t), es decir

$$\theta_{1_x} s(t),t(r(t)-s(t)) = \gamma, \qquad t>0. \tag{2}$$

Se supone que la temperatura $\theta = \theta(x,t)$ del material está definida por

$$\theta(x,t) = \begin{cases} \theta_1(x,t)<0 & \text{si } 0<x<s(t), \quad t>0 \\ 0 & \text{si } s(t)\leq x\leq r(t), \quad t>0 \\ \theta_2(x,t)>0 & \text{si } x>r(t), \quad t>0. \end{cases} \tag{3}$$

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el modelo en las fases sólida y líquida son las siguientes:

$$\alpha_1\theta_{1_{xx}}(x,t) = \theta_{1_t}(x,t), \qquad 0<x<s(t), \quad t>0 \tag{4}$$

$$\alpha_2\theta_{2_{xx}}(x,t) = \theta_{2_t}(x,t), \qquad x>r(t), \quad t>0 \tag{5}$$

donde $c_i > 0$, $k_i > 0$ y $\alpha_i = a_i^2 = k_i / \rho c_i > 0$ son el calor específico, la conductividad térmica y el coeficiente de difusión para la fase i ($i = 1$: fase sólida; $i = 2$: fase líquida) respectivamente. Las condiciones en la interfase sólida-pastosa $x = s(t)$ y en la interfase pastosa-líquida $x = r(t)$ están dadas por

(1), (2) y los requerimientos de continuidad de la temperatura, es decir

$$\theta_1(s(t),t)=\theta_2(r(t),t)=0, \quad t>0. \tag{6}$$

Las condiciones inicial y de borde están dadas por :

$$\theta_1(0,t)=-D<0, \quad t>0 \tag{7}$$

$$\theta_2(x,0)=\theta_2(+\infty,t)=E>0, \ x>0, \quad t>0, \tag{8}$$

$$s(0)=r(0)=0 \tag{9}$$

Se considera además una sobre-condición [Ca] de flujo de calor en el borde fijo $x = 0$ que está dada por [StTa, Ta2]

$$k_i\theta_{i_x}(0,t)=\frac{h_o}{\sqrt{t}}, \quad t>0 \ \text{con} \ h_o>0 \tag{10}$$

Si por medio de una experiencia de cambio de fase se pueden medir ciertas cantidades, entonces se encontrarán fórmulas para determinar simultáneamente coeficientes desconocidos (ε, γ : parámetros de la zona pastosa; h, ρ, c_1, c_2, k_1, k_2: coeficientes térmicos del material).

Se probará que los diferentes problemas para obtener tales coeficientes desconocidos, desarrollados en la sección siguiente, no tienen siempre una única solución. Más aún, ella existe si y sólo si los datos verifican algunas condiciones complementarias. En este trabajo, se generalizan resultados obtenidos en la Ref. 4 para el caso particular $\varepsilon = 1$ y $\gamma = 0$ (i.e., sin zona pastosa) y aquéllos obtenidos en la Ref. 5 para el caso de una fase.

En la Sección II se considera el modelo de zona pastosa para el problema de Stefan a dos fases para determinar un coeficiente térmico desconocido de un material semi-infinito con una sobre-condición en el borde fijo, suponiendo desconocidas las fronteras libres $x = s(t)$ y $x = r(t)$. Los resultados obtenidos para los ocho posibles casos se consideran en el Apéndice III el cual muestra las condiciones necesarias y suficientes que deben verificar los datos para la existencia de la solución junto a la expresión del correspondiente coeficiente desconocido. Se probarán las respectivas propiedades para determinar ε (caso 3) y k_2 (caso 7). Las funciones con sus propiedades y las restricciones que se utilizan en el texto y en el Apéndice III se especifican en los Apéndices I y II respectivamente.

II. DETERMINACIÓN DE UN COEFICIENTE TÉRMICO DESCONOCIDO

Teniendo en cuenta las hipótesis (H_1) - (H_3) se puede formular el siguiente

Problema (P).

Encontrar las fronteras libres $x = s(t)$ y $x = r(t)$, definidas para $t > 0$ con $0 < s(t) < r(t)$ y $s(0) = r(0) = 0$, la temperatura $\theta = \theta(x,t)$, definida por (I-3) para $x > 0$ y $t > 0$, y uno de los ocho coeficientes térmicos desconocidos ε, γ, h, ρ, c_1, c_2, k_1, k_2 de modo tal que se satisfagan las condiciones (I-1), (I-2), (I-4), (I-10) siendo $D > 0$, $E > 0$ y $h_o > 0$ datos conocidos o determinados a través de una experiencia con cambio de fase del material semi-infinito [1].

La solución de este problema está dada por

$$\theta_1(x,t)=-D+\frac{D}{f\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)}f\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \tag{1}$$

$$\theta_2(x,t)=\frac{-Ef\left(\frac{\omega}{a_2}\right)}{1-f\left(\frac{\omega}{a_2}\right)}+\frac{E}{1-f\left(\frac{\omega}{a_2}\right)}f\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), \tag{2}$$

$$s(t)=2\sigma\sqrt{t}\ , \ \sigma>0, \tag{3}$$

$$r(t)=2\omega\sqrt{t}\ , \ \omega>\sigma, \tag{4}$$

donde el coeficiente ω está dado por

$$\omega=\omega(\sigma)=a_1W\left(\frac{\sigma}{a_1}\right), \tag{5}$$

mientras que el coeficiente σ y el coeficiente térmico desconocido se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left|\begin{array}{l} (a)\ \frac{h_o}{h\rho a_1}\exp\left(\frac{\sigma^2}{a_1^2}\right)-\frac{Ek_2}{h\rho a_1 a_2\sqrt{\pi}}F_1\left(\frac{\omega(\sigma)}{a_2}\right)=G_1\left(\frac{\sigma}{a_1}\right) \\ (b)\ \frac{a_1}{k_1}f\left(\frac{\sigma}{a_1}\right)=\frac{D}{h_o\sqrt{\pi}} \end{array}\right. \tag{6}$$

Los ocho casos posibles para el Problema (P) se consideran en el Apéndice III el cual muestra las condiciones necesarias y suficientes que deben verificar los datos para la existencia de la solución junto con las expresiones del coeficiente σ y del correspondiente coeficiente desconocido. Se observa que el coeficiente ω está dado siempre por la expresión (5) en función de σ y a_1. Sólo se probarán las propiedades correspondientes a la determinación de ε (case 3) y k_2 (case 7).

– *Teorema I.*

La condición necesaria y suficiente para que el Problema (P), con σ y ε desconocidos, admita una única solución de la forma (1) – (4) es que los datos $D>0$, $E>0$, $h_o>0$, el coeficiente de la zona pastosa $\gamma>0$ y los coeficientes térmicos del material h, ρ, c_1, c_2, k_1, $k_2>0$ verifiquen las condiciones:

$$h_o > \frac{Ek_2}{a_2\sqrt{\pi}}, \quad f(x_5) < \frac{Dk_1}{h_o a_1\sqrt{\pi}} < f(x_4), \tag{7}$$

donde x_4 y x_5 son los únicos ceros positivos de las funciones H_4 y H_5 respectivamente. En tal caso, la solución está dada por

$$\sigma = a_1\varepsilon_1 \ , \ \varepsilon = \frac{2D}{\gamma\sqrt{\pi}} F_2(\varepsilon_1)H_5(\varepsilon_1) \ , \ \omega = a_1 W(\varepsilon_1) \tag{8}$$

siendo ε_1 la única solución de la ecuación

$$f(x) = \frac{Dk_1}{h_o a_1\sqrt{\pi}}, \qquad x>0. \tag{9}$$

– *Demostración.*

Se define

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{a_1}, \quad \text{con} \quad a_1 = \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{\rho\, c_1}}. \tag{10}$$

El coeficiente σ se obtiene de (10) y el elemento ε_1 es la solución de (9) si y sólo si los datos verifican la condición

$$\frac{Dk_1}{h_o a_1\sqrt{\pi}} < 1. \tag{11}$$

De (6a) se tiene que ε_1 debe verificar la ecuación

$$\frac{h_o}{h\rho a_1}\exp(-\varepsilon_1{}^2) - \frac{Ek_2}{h\rho a_1 a_2\sqrt{\pi}} F_1\left(\frac{a_1}{a_2}W(\varepsilon_1)\right) = \varepsilon_1 + \frac{(1-\varepsilon)\,\gamma\sqrt{\pi}}{2D} f(\varepsilon_1)\exp(\varepsilon_1^2)\,, \tag{12}$$

de la cual se deduce la expresión (8) para ε.

Entonces, se tienen las siguientes propiedades:

$$\varepsilon < 1 \Leftrightarrow H_4(\varepsilon_1) > 0 \Leftrightarrow H_4(0^+) > 0 \ \left(\text{i.e., } h_o > \tfrac{Ek_2}{a_2\sqrt{\pi}}\right) \text{y} \quad \varepsilon_1 < x_4 \ \left(\text{i.e., } f(\varepsilon_1) < f(x_4)\right), \tag{13}$$

donde x_4 es la única raíz positiva de H_4 (H_4 es una función decreciente para $x>0$), y además

$$\varepsilon > 0 \Leftrightarrow H_5(\varepsilon_1) > 0 \Leftrightarrow \varepsilon_1 > x_5 \ \left(\text{i.e., } f(\varepsilon_1) > f(x_5)\right), \tag{14}$$

donde x_5 es la única raíz positiva de H_5. De (20) y (21) se deduce (11) pues $x_5 < x_4$.

– *Teorema II.*

La condición necesaria y suficiente para que el Problema (P), con σ y k_2 desconocidos, admita una única solución de la forma (1) – (4) es que los datos $D>0$, $E>0$, $h_o>0$, los coeficientes de la zona pastosa $0<\varepsilon<1$, $\gamma>0$ y los coeficientes térmicos del material h, ρ, c_1, c_2, $k_1>0$ verifiquen la condición

$$\frac{Dk_1}{h_o a_1\sqrt{\pi}} < f(x_{17}), \tag{15}$$

siendo x_{17} el único cero positivo de la función H_{17}. En tal caso, la solución está dada por

$$\sigma = a_1\varepsilon_1, \quad k_2 = \frac{k_1 c_2}{c_1}\frac{W^2(\xi_1)}{B^2}, \qquad \omega = a_1 W(\varepsilon_1) \tag{16}$$

donde ε_1 es la única solución de (9) y B es la única solución de la ecuación

$$\frac{1}{H_{16}(x)}=\frac{h}{Ec_2}\frac{H_2(\varepsilon_1)}{W(\varepsilon_1)}, \quad x>0. \tag{17}$$

– *Demostración.*

El coeficiente σ se obtiene como en el caso 3. De (6a) se deduce que ε_1 debe verificar la ecuación

$$\frac{Ek_2}{h\rho a_1 a_2\sqrt{\pi}}\,F_1\!\left(\tfrac{a_1}{a_2}W(\varepsilon_1)\right)=H_2(\varepsilon_1). \tag{18}$$

Si se define

$$B=\frac{a_1}{a_2}W(\;) \qquad a=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{c}} \tag{19}$$

entonces, la ecuación (18) es equivalente a la ecuación

$$\frac{F_1(B)}{B}=\frac{h\sqrt{\pi}}{Ec_2}\frac{H_2(\varepsilon_1)}{W(\varepsilon_1)}, \quad B>0, \tag{20}$$

es decir (17). Teniendo en cuenta las propiedades de la función H_{16} se deduce que existe una única solución de (17) si y sólo si $H_{17}(\varepsilon_1)>0$ si y sólo si $\varepsilon_1<x_{17}$ (es decir (15)), siendo x_{17} la única raíz positiva de H_{17}. De (19) se obtiene la expresión del coeficiente k_2.

AGRADECIMIENTOS:

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por CONICET (Argentina) a través del Proyecto PID ,BID # 221.

REFERENCIAS

1. J. C. Arderius, M. A. Lara, D. A. Tarzia, "*Experimental-numerical determination of thermal coefficients through a phase-change process*", To appear.
2. J. R. Cannon, "*The one-dimensional heat equation*", Addison-Wesley, Menlo Park, California (1984).
3. A. D. Solomon, D. G. Wilson, V. Alexiades, "*A mushy zone model with an exact solution*", Letters Heat Mass Transfer **9**, 319-324 (1982).
4. M. B. Stampella, D. A.Tarzia, "*Determination of one or two unknown thermal coefficients of a semi-infinite material through a two-phase Stefan problem*", Int. J. Engng. Sci. **27**, 1407, 1419 (1989).
5. D. A. Tarzia, "*Determination of unknown thermal coefficients of a semi-infinite material for the one-phase Lameó - Clapeyron (Stefan) problem through* the Solomon - Wilson - Alexiades mmushy zone model", Int. Comm. Heat Mass Transfer **14**, 219, 228 (1987).
6. D. A. Tarzia, "*Neumann-like solution for the two-phase Stefan problem with a simple mushy zone model*", Mat. Aplic. Comput. **9**, 201-211 (1990).

APÉNDICE I

Las funciones reales utilizadas están definidas por

$$f(x)=erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2)\,dt, \quad F_1(x)=\frac{\exp(-x^2)}{1-f(x)},$$

$$F_2(x)=\frac{\exp(-x^2)}{f(x)}, \quad x>0$$

$$W(x)=x+\frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2D}f(x)\exp(x^2),$$

$$G_1(x)=x+\frac{(1-\varepsilon)\,\gamma\sqrt{\pi}}{2D}f(x)\exp(x^2), \quad x>0$$

$$H_1(x)=x\,F_1(x), \quad H_2(x)=\frac{h_o}{h\rho a_1}\exp(-x^2)-G_1(x), \quad x>0$$

$$H_3(x)=\frac{h_o}{\rho a_1}\exp(-x^2)-\frac{Ek_2}{\rho a_1 a_2\sqrt{\pi}}F_1\!\left(\tfrac{a_1}{a_2}W(x)\right), \quad x>0$$

$$H_4(x)=\frac{h_o}{h\rho a_1}\exp(-x^2)-x-\frac{Ek_2}{h\rho a_1 a_2\sqrt{\pi}}F_1\!\left(\tfrac{a_1}{a_2}W(x)\right), \quad x>0$$

$$H_5(x)=\frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2D}f(x)\exp(x^2)-H_4(x), \quad H_8(x)=\frac{W(x)}{f(x)},$$

$$H_9(x)=\frac{G_1(x)}{f(x)}, \quad x>0$$

$$H_6(x)=(1-\varepsilon)\tfrac{a_2}{a_1}x+\frac{Ek_2}{h\rho a_1 a_2\sqrt{\pi}}F_1(x), \quad x>0$$

$$H_7(x)=\frac{h_o}{h\rho a_1}\exp(-x^2)-x-\frac{Ek_2}{h\rho a_1 a_2\sqrt{\pi}}F_1\!\left(\tfrac{a_1}{a_2}x\right), \quad x>0$$

$$H_{10}(x)=\frac{h_o^2\sqrt{\pi}}{Dh\rho k_1}\exp(-x^2)-\frac{Eh_o k_2}{Dh\rho k_1 a_2}F_1\!\left(\tfrac{Dk_1}{h_o a_2\sqrt{\pi}}H_8(x)\right)$$

$x>0$

$$H_{11}(x)=\frac{\beta_2}{\beta_1}x+F_1(x), \quad H_{13}(x)=f(x)\,W(x),$$

$$H_{14}(x)=f(x)\,G_1(x),\quad x>0$$

$$\text{con } \beta_1=\frac{Dk_1}{a_2\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2D}\right),$$

$$\beta_2=\frac{Dh\rho k_1 a_2}{Ek_2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\frac{(1-\varepsilon)\,\gamma\sqrt{\pi}}{2D}\right),$$

$$H_{12}(x)=\beta_1\beta_3\frac{1}{x},\quad x>0 \text{ con } \beta_3=\frac{a_2\sqrt{\pi}}{Ek_2}$$

$$H_{15}(x)=\frac{Dc_1}{h\sqrt{\pi}}\exp(-x^2)-\frac{DEc_1k_2}{h\pi\, h_o a_2}F_1\left(\frac{h_o\sqrt{\pi}}{D\rho c_1 a_2}H_{13}(x)\right),$$
$x>0$

$$H_{16}(x)=\sqrt{\pi}\,x\exp(x^2)\,(1-f(x)),$$

$$H_{19}(x)=f(x)H_{18}(x),\; x>0$$

$$H_{17}(x)=\frac{h_o}{E\rho a_1 c_2}\exp(-x^2)-\left(1+\frac{(1-\varepsilon)h}{Ec_2}\frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2D}f(x)\exp(x^2)\right)$$
$$-\left(1+\frac{h}{Ec_2}\right)x,\quad x>0$$

$$H_{18}(x)=\exp(x^2)\left(G_1(x)+\frac{E\sqrt{c_1c_2k_2}}{h\sqrt{\pi}\,k_1}F_1\left(\frac{\sqrt{k_1c_2}}{\sqrt{c_1k_2}}W(x)\right)\right),$$
$x>0$

Las propiedades principales de las funciones mencionadas anteriormente están dadas por

$f(0^+)=0$	$f(+\infty)=1$	$f'(x)>0,\; x>0$
$F_1(0^+)=1$	$F_1(+\infty)=+\infty$	$F_1'(x)>0,\; x>0$
$F_2(0^+)=+\infty$	$F_2(+\infty)=0$	$F_2'(x)<0,\; x>0$
$W(0^+)=0$	$W(+\infty)=+\infty$	$W'(x)>0,\; x>0$
$G_1(0^+)=0$	$G_1(+\infty)=+\infty$	$G_1'(x)>0,\; x>0$
$H_1(0^+)=0$	$H_1(+\infty)=+\infty$	$H_1'(x)>0,\; x>0$
$H_2(0^+)=\frac{h_o}{h\rho a_1}$	$H_2(+\infty)=-\infty$	$H_2'(x)<0,\; x>0$
$H_3(0^+)=\alpha_1$	$H_3(+\infty)=-\infty$	$H_3'(x)<0,\; x>0$

$$\text{con } \alpha_1=\frac{1}{\rho a_1}\left(h_o-\frac{Ek_2}{a_2\sqrt{\pi}}\right)$$

$H_4(0^+)=\frac{\alpha_1}{h}$	$H_4(+\infty)=-\infty$	$H_4'(x)<0,\; x>0$
$H_5(0^+)=-\frac{\alpha_1}{h}$	$H_5(+\infty)=+\infty$	$H_5'(x)>0,\; x>0$
$H_6(0^+)=\alpha_2$	$H_6(+\infty)=+\infty$	$H_6'(x)>0,\; x>0,$

$$\text{con } \alpha_2=\frac{Ek_2}{h\rho a_1 a_2\sqrt{\pi}}$$

$H_7(0^+)=\frac{\alpha_1}{h}$	$H_7(+\infty)=-\infty$	$H_7'(x)<0,\; x>0$
$H_8(0^+)=\alpha_3$	$H_8(+\infty)=+\infty$	$H_8'(x)>0,\; x>0,$

$$\text{con } \alpha_3=\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2D}$$

$H_9(0^+)=\alpha_4$	$H_9(+\infty)=+\infty$	$H_9'(x)>0,\; x>0$

$$\text{con } \alpha_4=\frac{2}{\sqrt{\pi}}+\frac{(1-\varepsilon)\gamma\sqrt{\pi}}{2D}$$

$H_{10}(0^+)=\alpha_5$	$H_{10}(+\infty)=-\infty$	$H_{10}'(x)<0,\; x>0$

$$\text{con } \alpha_5=\frac{Eh_o k_2}{dh\rho k_1 a_2}\left(\frac{h_o a_2\sqrt{\pi}}{Ek_2}-F_1\left(\frac{Dk_1}{h_o a_2\sqrt{\pi}}\alpha_3\right)\right)$$

$H_{11}(0^+)=1$	$H_{11}(+\infty)=+\infty$	$H_{11}'(x)>0,\; x>0$
$H_{12}(0^+)=+\infty$	$H_{12}(+\infty)=0$	$H_{12}'(x)<0,\; x>0$
$H_{13}(0^+)=0$	$H_{13}(+\infty)=+\infty$	$H_{13}'(x)>0,\; x>0$
$H_{14}(0^+)=0$	$H_{14}(+\infty)=+\infty$	$H_{14}'(x)>0,\; x>0$
$H_{15}(0^+)=\alpha_6$	$H_{15}(+\infty)=-\infty$	$H_{15}'(x)<0,\; x>0,$

$$\text{con } \alpha_6=\frac{Dc_1}{h\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{Ek_2}{h_o a_2\sqrt{\pi}}\right)$$

$$H_{16}(0^+)=0 \qquad H_{16}(+\infty)=1 \qquad H_{16}'(x)>0,\ x>0,$$

$$H_{17}(0^+)=\alpha_7 \qquad H_{17}(+\infty)=-\infty \qquad H_{17}'(x)<0,\ x\geq 0,$$

con $\alpha_7=\dfrac{h_o}{E\rho a_1 c_2}$

$$H_{18}(0^+)=\alpha_8 \qquad H_{18}(+\infty)=+\infty \qquad H_{18}'(x)>0,\ x>0,$$

con $\alpha_8=\dfrac{E\sqrt{c_1c_2k_2}}{h\sqrt{\pi k_1}}$

$$H_{19}(0^+)=0 \qquad H_{19}(+\infty)=+\infty \qquad H_{19}'(x)>0,\ x>0,$$

APÉNDICE II

Las restricciones utilizadas en el texto son

$(R1)$ $\quad h_o>\dfrac{Ek_2}{a_2\sqrt{\pi}}$

$(R2)$ $\quad \dfrac{Dk_1}{h_oa_1\sqrt{\pi}}<f(x_2)$, $\;x_2$:el único cero positivo de H_2.

$(R3)$ $\quad \dfrac{Dk_1}{h_oa_1\sqrt{\pi}}<f(x_3)$, $\;x_3$:el único cero positivo de H_3.

$(R4)$ $\quad \dfrac{Dk_1}{h_oa_1\sqrt{\pi}}<f(x_4)$, $\;x_4$:el único cero positivo de H_4.

$(R5)$ $\quad \dfrac{Dk_1}{h_oa_1\sqrt{\pi}}>f(x_5)$, $\;x_5$: el único cero positivo de H_5.

$(R6)$ $\quad \dfrac{Dk_1}{h_oa_1\sqrt{\pi}}<f(x_7)$, $\;x_7$: el único cero positivo de H_7.

$(R7)$ $\quad h_o>\dfrac{Dk_1}{a_2\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}+\dfrac{\gamma\sqrt{\pi}}{2D}\right)\dfrac{1}{\eta}$, η la única solución positiva de la ecuación $H_{11}(x) = H_{12}(x)$, $x > 0$

$(R8)$ $\quad \dfrac{Dk_1}{h_oa_1\sqrt{\pi}}<f(x_{17})$, $\;x_{17}$:el único cero positivo de H_{17}.

APÉNDICE III

Caso	Coeficiente desconocido	Restricciones	Solución
1	c_2	$(R2)$	$\sigma=a_1\xi_1$, $c_2=\frac{c_1k_2}{k_1}\frac{B^2}{W^2(\xi_1)}$ donde ξ_1 es la única solución positiva de la ecuación. $f(x)=\frac{Dk_1}{h_oa_1\sqrt{\pi}}$, $x>0$ y B es la única solución positiva de la ecuación $H_1(x)=\frac{hk_1\sqrt{\pi}}{E_{c_1}k_2}W(\xi_1)H_2(\xi_1)$, $x>0$.
2	h	$(R1)$ $(R3)$	$\sigma=a_1\xi_1$, $h=\frac{H_3(\xi_1)}{G_1(\xi_1)}$ siendo ξ_1 como en el caso 1.
3	ε	$(R1)$ $(R4)$ $(R5)$	$\sigma=a_1\xi_1$, $\in=\frac{2D}{\gamma\sqrt{\pi}}F_2(\xi_1)H_5(\xi_1)$ siendo ξ_1 como en el caso 1.
4	γ	$(R1)$ $(R6)$	$\sigma=a_1\xi_1$, $\gamma=\frac{2D}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a_2}{a_1}B-\xi_1\right)F_2(\xi_1)$ siendo ξ_1 como en el caso 1 y B la única solución positiva de la ecuación $H_6(x)=\frac{h_o}{h\rho a_1}\exp(-\xi_1^2)-\in\xi_1,\ x>\frac{a_1}{a_2}\xi_1$
5	c_1	$(R7)$	$\sigma=\frac{Dk_1}{h_o\sqrt{\pi}}\frac{\xi_1}{f(\xi_1)}$, $c_1=\frac{\pi h_o^2}{D^2\rho k_1}f^2(\xi_1)$ siendo ξ_1 la única solución positiva de la ecuación. $H_9(x)=H_{10}(x)$, $x>0$.
6	k_1	$(R1)$	$\sigma=\frac{h_o\sqrt{\pi}}{D\rho c_1}\xi_1 f(\xi_1)$, $k_1=\frac{\pi h_o^2}{D^2\rho c_1}f^2(\xi_1)$ siendo ξ_1 la única solución positiva de la ecuación. $H_{14}(x)=H_{15}(x)$, $x>0$.
7	k_2	$(R8)$	$\sigma=a_1\xi_1$, $k_2=\frac{k_1c_2}{c_1}\frac{W^2(\xi_1)}{B^2}$ siendo ξ_1 como en el caso 1 y B la única solución positiva de la ecuación. $\frac{1}{H_{16}(x)}=\frac{h}{Ec_2}\frac{H_2(\xi_1)}{W(\xi_1)}$, $x>0$.
8	ρ	—	$\sigma=\frac{hk_1}{h_oc_1}\xi_1H_{18}(\xi_1)$, $\rho=\frac{h_o^2c_1}{h^2k_1}\frac{1}{H_{18}^2(\xi_1)}$ siendo ξ_1 la única solución positiva de la ecuación. $H_{19}(x)=\frac{Dc_1}{h\sqrt{\pi}}$, $x>0$.