

# COEFICIENTES DE REFLEXIÓN EN MEDIOS UNIAXIALES EN LA REFLEXIÓN TOTAL

L. I. Pérez\*

Laboratorio de Óptica, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón I, (1428) Buenos Aires.

Se dedujeron expresiones de los coeficientes de reflexión para interfases medio isotropo-cristal uniaxial no sólo para geometrías totalmente arbitrarias sino también para cualquier relación de índices de refracción de los medios, incluyendo la posibilidad de que ambos medios sean magnéticamente isotropos. Las expresiones halladas permiten calcular no sólo los módulos sino también las fases de los coeficientes de reflexión en el caso en que el rayo ordinario y/o el extraordinario sufran reflexión total.

Expressions for the reflection coefficients for an isotropic medium - uniaxial crystal interface have been deduced not only for completely arbitrary geometries but for every refraction indices relation as well, including the possibility of being both media magnetically isotropic. The expressions obtained allow us to calculate not only the absolute values but also the phases of the reflection coefficients when the ordinary and/or the extraordinary rays suffer external total reflection.

## I. INTRODUCCIÓN

En un trabajo anterior<sup>1</sup> calculamos los coeficientes de reflexión para interfases medio isotropo-cristal uniaxial no absorbentes ni magnéticos para direcciones de incidencia y orientaciones del eje óptico totalmente arbitrarios, pero para índices de refracción tales que no ocurriera el fenómeno de reflexión total externa.

En este trabajo se obtienen fórmulas de los coeficientes de reflexión en función de la dirección de incidencia y de las características de las interfases, para geometrías totalmente arbitrarias y para cualquier relación entre los índices de refracción de los medios. Además, debido a que en los últimos años la fabricación de cristales artificiales brinda la posibilidad mediata de poseer cristales magnéticos en el rango óptico, en este trabajo se ha considerado la posibilidad de que los medios sean magnéticamente isotropos. Se comparan también los coeficientes de reflexión obtenidos con los correspondientes a medios con permeabilidad iguales a la del vacío.

## II. COEFICIENTES DE REFLEXIÓN

Los coeficientes de reflexión se definen, como en el caso isotropo, para una determinada polariza-

ción del haz incidente (paralela o perpendicular al plano de incidencia) de manera que ellos sean representativos no sólo de la amplitud sino también de la polarización de las ondas reflejadas.

En los cristales uniaxiales, la existencia de una dirección preferencial lleva no sólo a que la polarización de las ondas refractadas esté determinada por

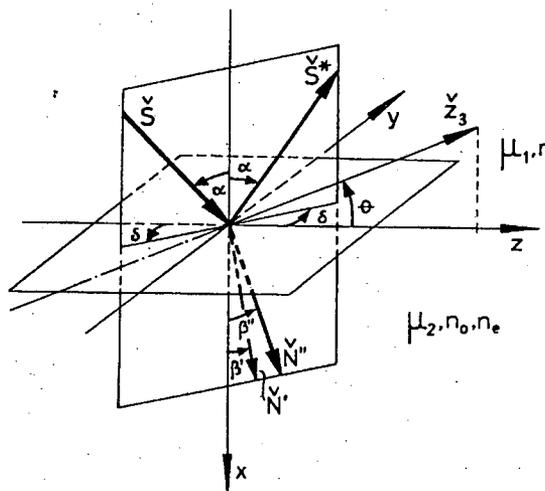


Fig. 1: Sistema de coordenadas. El plano yz es la interfase. Para  $x < 0$  el medio es isotropo y para  $x > 0$  uniaxial.  $\vec{S}$ ,  $\vec{S}^*$ ,  $\vec{N}'$  y  $\vec{N}''$  representan las normales incidente, reflejada, ordinaria y extraordinaria. La dirección del eje óptico está caracterizada por el ángulo  $\vartheta$  y el plano de incidencia por el ángulo  $\delta$ .

\* Profesional Asociado de la Carrera de Apoyo a la Investigación (CONICET).

la orientación del eje óptico, sino también a que la polarización de la onda reflejada no coincida con la de la incidente, excepto para algunas geometrías con asimetría<sup>1</sup>.

Consideraremos que la interfase está formada por un medio isótropo (de permeabilidad  $\mu_1$  y donde la velocidad de fase de las ondas es  $u$ ) y un cristal uniaxial (de permeabilidad  $\mu_2$  y con velocidades de fase ordinaria y extraordinaria  $u_0$  y  $u_e$  respectivamente) (Fig. 1).

A partir de las expresiones de los campos incidentes, reflejado y transmitidos obtenidos en Ref.<sup>1</sup> y de las condiciones de contorno para interfases con permeabilidades distintas a las del vacío, se obtiene las expresiones de las componentes del vector desplazamiento correspondiente a la onda reflejada en función de las componentes del vector desplazamiento incidente.

$$(\vec{D}^* \cdot \vec{y}) = \frac{u_0^2}{u^2} \frac{N(B_2 - B_1) - M(A_2 - A_1)}{A_1 B_2 - A_2 B_1} - (\vec{D} \cdot \vec{y}) \quad (1)$$

$$(\vec{D}^* \cdot \vec{z}) = \frac{1}{u^2} \frac{\lambda'(NB_2 - MA_2) + \lambda''(MA_1 NB_1)}{A_1 B_2 - A_2 B_1} - (\vec{D} \cdot \vec{z}) \quad (2)$$

donde el supraíndice "\*" caracteriza a los campos reflejados,

$$A_1 = \rho \eta \beta^2 u_0^2 \frac{\mu_2}{\mu_1} + (1 - \rho^2 \beta^2) \lambda' \frac{\mu_2}{\mu_1} - \beta \beta' u \quad (3)$$

$$A_2 = \rho \eta \beta^2 u_0^2 \frac{\mu_2}{\mu_1} + (1 - \rho^2 \beta^2) \lambda'' \frac{\mu_2}{\mu_1} - \beta \beta'' u \quad (4)$$

$$B_1 = \rho u_0^2 \frac{\mu_2}{\mu_1} + \eta \lambda' \frac{\mu_2}{\mu_1} + \rho' u^2 \quad (5)$$

$$B_2 = \rho u_0^2 \frac{\mu_2}{\mu_1} + \eta \lambda'' \frac{\mu_2}{\mu_1} + \rho'' u^2 \quad (6)$$

$$M = 2u^2 [\rho (\vec{D} \cdot \vec{y}) + \eta (\vec{D} \cdot \vec{z})] \quad (7)$$

$$N = 2u^2 [\rho \eta \beta^2 (\vec{D} \cdot \vec{y}) + (1 - \rho^2 \beta^2) (\vec{D} \cdot \vec{z})] \quad (8)$$

y  $\rho', \lambda', \beta', \rho'', \lambda'', \beta''$  corresponden a las expresiones (42), (45), (47), (52), (55) y (57) de Ref.1.

Sean  $E_s^*$  y  $E_p^*$  las componentes perpendiculares, y  $E_p$  y  $E_s$  las componentes paralelas al plano

de incidencia de los campos eléctricos incidente y reflejado. A partir de (1), de (2) y de la relación entre el desplazamiento y el campo eléctrico en el medio isótropo  $\vec{E} = \mu_1 u^2 \vec{D}$  se obtienen las componentes del campo eléctrico reflejado  $E_p^*$  y  $E_s^*$  en función de las componentes del campo eléctrico incidente  $E_p$  y  $E_s$ :

$$\begin{bmatrix} E_p^* \\ E_s^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{pp} & R_{sp} \\ R_{ps} & R_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_p \\ E_s \end{bmatrix} \quad (9)$$

con

$$R_{pp} = \frac{2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \left[ (u_0^2 \text{sen} \delta + \lambda' \text{cos} \delta) (A_2 \text{tg} \alpha + B_2 \text{cos} \delta) - (u_0^2 \text{sen} \delta + \lambda'' \text{cos} \delta) (A_1 \text{tg} \alpha + B_1 \text{cos} \delta) \right] - 1 \quad (10)$$

$$R_{sp} = \frac{2 \text{sen} \delta \text{cos} \alpha}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \left[ B_1 (u_0^2 \text{sen} \delta + \lambda'' \text{cos} \delta) - B_2 (u_0^2 \text{sen} \delta + \lambda' \text{cos} \delta) \right] \quad (11)$$

$$R_{ss} = \frac{2 \text{sen} \delta \text{cos}^2 \alpha}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \left[ B_1 (u_0^2 \text{cos} \delta - \lambda'' \text{sen} \delta) - B_2 (u_0^2 \text{cos} \delta - \lambda' \text{sen} \delta) \right] - 1 \quad (12)$$

$$R_{ps} = \frac{2 \text{cos} \alpha}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \left\{ (u_0^2 \text{cos} \delta - \lambda' \text{sen} \delta) (A_2 \text{tg} \alpha + B_2 \text{cos} \delta) - (u_0^2 \text{cos} \delta - \lambda'' \text{sen} \delta) (A_1 \text{tg} \alpha + B_1 \text{cos} \delta) \right\} \quad (13)$$

De estas ecuaciones se ve claramente que el campo reflejado tiene componentes perpendiculares y paralela al plano de incidencia, aún cuando el campo incidente esté polarizado en alguna de estas direcciones.

En la Fig. 2 se muestran los coeficientes de reflexión para una interfase aire-cristal uniaxial magnético para distintos valores de la permeabilidad del cristal del 10%, los coeficientes  $R_{pp}$  y  $R_{ss}$  varían alrededor de un 20% para incidencia normal, mientras que la máxima diferencia entre  $R_{ps}$  y  $R_{sp}$  es de aproximadamente el 2% y se da para ángulos cercanos al de pseudo-Brewster.

### III. COEFICIENTES DE REFLEXIÓN EN LA REFLEXIÓN TOTAL

Cuando la velocidad de fase en el medio isotrópico es menor que la velocidad de fase principal ordinaria o extraordinaria en el cristal, puede darse el fenómeno de reflexión total<sup>2</sup>. Las expresiones de los coeficientes (10)-(13), siguen siendo válidas pues en su deducción no se hizo ninguna suposición sobre los índices de refracción. En el caso en que el ángulo de incidencia sea mayor que el de reflexión total ordinaria o extraordinaria, los coeficientes se hacen complejos. En la Fig. 3 se muestran los módulos y fases de los mismos en función del ángulo de incidencia para una interfase vidrio-cristal uniaxial magnético. Se observa que para ángulos de incidencia mayores que el de reflexión total ordinaria ( $\alpha'_T$ ) y que el de reflexión total extraordinaria ( $\alpha''_T$ ), el módulo de  $R_{ps}$  coincide con el de  $R_{sp}$  y el de  $R_{pp}$  con el de  $R_{ss}$ , y además se cumple:

$$|R_{pp}|^2 + |R_{sp}|^2 = |R_{ss}|^2 + |R_{ps}|^2 = 1.$$

Además en la Fig. 3b se observa que para ángulos de incidencia mayores que  $\alpha'_T$  los módulos de  $R_{sp}$  y  $R_{ps}$  son iguales. Esto se cumple en forma numérica independientemente de que  $\alpha'_T$  sea mayor o menor que  $\alpha''_T$ . Esto se puede probar a partir de las Ec. (11) y (12). Después de un álgebra extensa se obtiene:

$$|R_{ps}|^2 - |R_{sp}|^2 = \mathbb{C} \cos^2 \delta \operatorname{sen}^2 \delta \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha \quad (\check{z}, \check{x})$$

$$(\check{z}, \check{z}) G_1 \quad (14)$$

con

$$G_1 = \left[ u^2 / u_0^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha + |u^2 / u_0^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha| \right]$$

$$\times \operatorname{Re} \sqrt{u^2 / u_0^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha} - \left[ (u^2 / u_0^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha) + \right.$$

$$\left. \frac{|u^2 / u_0^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha|}{|u^2 / u_0^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha|} \operatorname{Re} \sqrt{u^2 / u_0^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha} \right] \quad (15)$$

y  $\mathbb{C}$  una función finita.

Si  $\alpha > \alpha'_T$  la componente perpendicular a la interfase de la normal al frente de ondas refractadas ordinarias es imaginaria pura y por lo tanto:

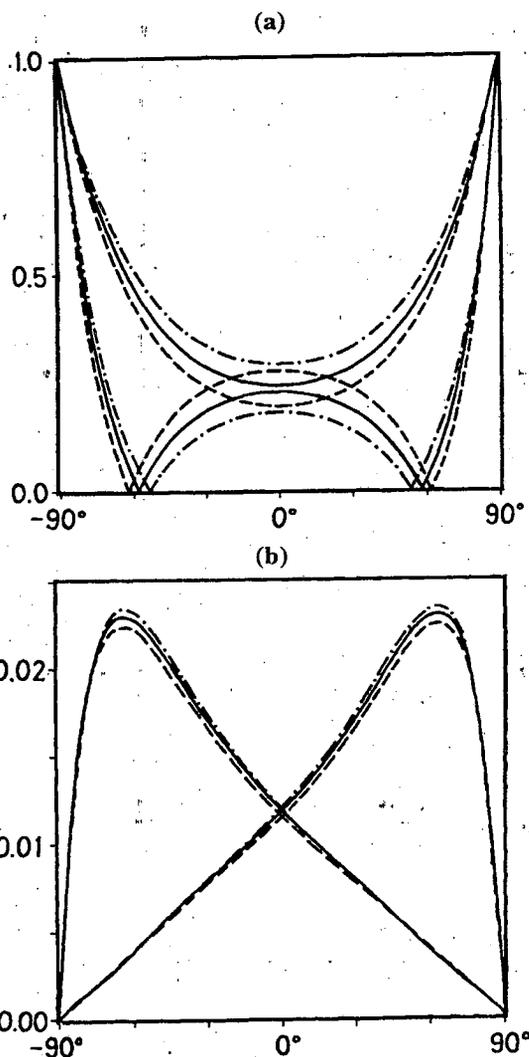


Fig. 2: Coeficientes de reflexión para una interfase aire-cristal uniaxial en función del ángulo de incidencia para  $\vartheta = 45^\circ$ ,  $\delta = 30^\circ$ ,  $n = 1$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $n_o = 1.6584$ ,  $n_e = 1.4865$  y distintos valores de  $\mu_2$ . ---  $\mu_2 = 0.9$ ; —  $\mu_2 = 1.0$ ; - -  $\mu_2 = 1.1$

$$\operatorname{Re} \sqrt{u^2 / u_0^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = 0 \quad (16)$$

y

$$|u^2 / u_0^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha| = \operatorname{sen}^2 \alpha - u^2 / u_0^2 \quad (17)$$

De (14)-(17) se obtiene entonces que los módulos de  $R_{ps}$  y  $R_{sp}$  coinciden si el ángulo de incidencia es mayor que el de reflexión total ordinaria, además de hacerlo para geometrías con simetrías y para incidencia normal y rasante.

Por otra parte en la Fig. 3d se observa que las fases de  $R_{ps}$  y  $R_{sp}$  difieren en  $\pi$  para ángulos mayo-

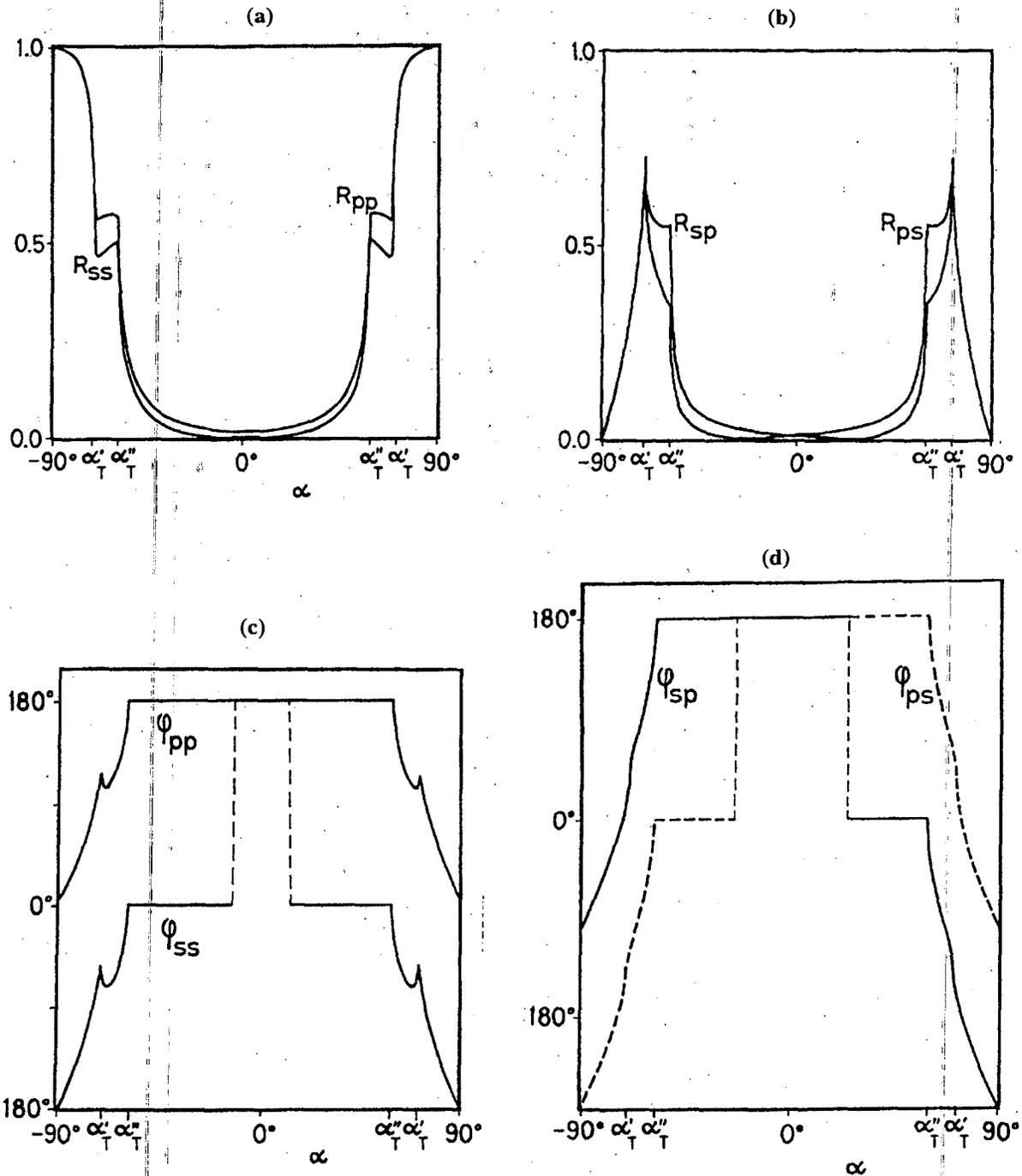


Fig. 3 a), b), c), d): Módulos y fases de los coeficientes de reflexión para una interfase vidrio-cristal uniaxial en función del ángulo de incidencia para  $\vartheta=45^\circ$ ,  $\delta=60^\circ$ ,  $n=1.755$ ,  $\mu_1=1$ ,  $n_0=1.6584$ ,  $n_e=1.4865$ ,  $\mu_2=0.9$  ( $\alpha'_T=70.9^\circ$ ,  $\alpha''_T=59.2^\circ$ )

res que el de reflexión total extraordinaria y menores que el de reflexión total ordinaria. Esto se prueba analíticamente a partir de (11) y (12). Se obtiene:

$$\tan(\varphi_{sp} - \varphi_{ps}) = 2u \frac{(\check{z} \cdot \check{x})}{(\check{z} \cdot \check{z})} \frac{(\check{z} \cdot \check{z})}{\text{sen}^2 \alpha} \cos \alpha G_2 \quad (18)$$

con

$$G_2 = \left[ u^2 / u_0^2 - \text{sen}^2 \alpha + \left| u^2 / u_0^2 - \text{sen}^2 \alpha \right| \right] \frac{\text{Imag} \sqrt{u^2 / u^2 - \text{sen}^2 \alpha}}{\left| \frac{u^2}{u^2} \left[ u^2 / u^2 - \text{sen}^2 \alpha \right] \right|} - \left[ u^2 / u_0^2 - \text{sen}^2 \alpha + \left| u^2 / u_0^2 - \text{sen}^2 \alpha \right| \right] \frac{\text{Imag} \sqrt{u^2 / u_0^2 - \text{sen}^2 \alpha}}{\left| \frac{u^2}{u^2} \left[ u^2 / u^2 - \text{sen}^2 \alpha \right] \right|} \quad (19)$$

De (18) y (19) se obtiene que, además de casos donde existe simetría en la geometría, el desfase entre  $R_{ps}$  y  $R_{sp}$  es cero o  $\pi$  para ángulos de incidencia mayores que  $\alpha''_T$  y menores que  $\alpha'_T$  independientemente de las características del cristal. Así si  $\alpha'_T$  es menor que  $\alpha''_T$ , las fases nunca difieren en cero o  $\pi$ . En consecuencia, nunca se puede dar el caso en que los módulos y las fases de  $R_{ps}$  y  $R_{sp}$  coincidan excepto para casos de simetría donde estos coeficientes son nulos.

#### IV. CONCLUSIONES

Se han obtenido fórmulas para los coeficientes de reflexión en función de la dirección de incidencia para interfases medio isotropo-cristal uniaxial con permeabilidad distintas a la del vacío y válidas

en la zona de reflexión total. Además se han estudiado las curiosas relaciones entre los coeficientes de reflexión cruzados.

#### AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Srta. Marta Pedernera por la realización de las figuras. Hecho con subsidios del CONICET Y UBA.

#### REFERENCIAS

1. M. C. Simon y L. I. Pérez. *Journal of Modern Optics* 38, 3 (1991) 503.
2. M. C. Simon y L. I. Pérez. *Optik* 82, 2 (1989) 3.