

# UN MODELO MECÁNICO PARA EL CRECIMIENTO DE RAÍCES DE CULTIVOS DEBIDO AL TRANSPORTE Y TOMA DE AGUA

J. C. Reginato,

*Departamento de Química-Física, Facultad de Ciencias Exactas Físico-Químico y Naturales,  
Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta 8 - Km 601, (5800), Río Cuarto, Córdoba.*

D. A. Tarzia

*Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad Austral,  
Paraguay 1950, (2000), Rosario y PROMAR (CONICET) Rosario.*

Se presenta un simple modelo mecánico para el crecimiento de raíces de cultivos debido a la toma de agua. El nuevo modelo es deducido para una única raíz y son considerados los efectos de los parámetros relacionados con el transporte de agua en suelo y no las clásicas aproximaciones de resistencias al flujo de agua en rizósfera, interface suelo-planta así como en el interior de la raíz. El efecto de la capacidad suelo-agua es incluida para suelos de bajo contenido de agua con una aproximación basada en el modelo de tubos capilares de Alexander para el flujo de agua. Se obtienen soluciones analíticas a través del planteo de un modelo de frontera libre para el crecimiento de raíz acoplado con transporte de agua. Dichas soluciones para el crecimiento radial vs. tiempo así como valores del potencial agua sobre la interfase raíz-suelo vs radio de la raíz son graficadas en función de parámetros característicos del sistema suelo-planta-agua.

A simple model for root growth of crops owing to the water uptake is presented. This new model is derived for a single root and the effects of parameters related with the water transport in soil are considered. The classic approach of water resistances in rhizosphere, root-soil interface and root are not considered. The effect of water capacity is included for soil of low soil-water contents through the approach of capillary tube model of Alexander for water flow through soil pores. Analytical solutions through a free boundary model for root growth coupled with water transport are obtained. Examples of water potential at root-soil interface vs. root radius and root radius vs. time curves are plotted as a function of some characteristics parameters of system soil-plant.

## I. INTRODUCCIÓN

Una gran variedad de trabajos sobre el flujo de agua en el sistema suelo-planta han descrito al mismo por un análogo de la ley de Ohm (Van den Honert, 1948<sup>1</sup>) y han sido definido diferentes resistencias al flujo de agua hacia una única raíz en suelo (Gardner, 1960<sup>2</sup>; Newman, 1969<sup>3</sup>), en la interfase raíz-suelo (Herkelrath, 1977<sup>4</sup>); Weatherley, 1978<sup>5</sup>) y en el interior de la raíz (Newman, 1976<sup>6</sup>; Fiscus, 1977<sup>7</sup>), así como la importancia de las mismas sobre el transporte de agua (Passioura, 1980<sup>8</sup>), pero sin considerar simultáneamente el transporte de agua, toma de agua y crecimiento radical acoplados. Recientemente, se han presentado trabajos sobre transporte de nutrientes y crecimiento radical acoplados mediante la modelización con problemas de frontera libre y solucionados a través del método cuasiestacionario (Reginato, Tarzia y Cantero, 1990<sup>9</sup>, 1991<sup>10</sup>) y el método del balance integral (Reginato y Tarzia, 1993<sup>11</sup>). Similarmente, en forma análoga a los trabajos citados últimamente, el objetivo del presente modelo es estimar cualitativamente en una primera

etapa los efectos de los diferentes parámetros del sistema suelo-planta sobre el transporte de agua y crecimiento radical acoplados a través de un modelo de frontera libre a una fase (el suelo).

## II. ANÁLISIS

De acuerdo al modelo de flujo de agua hacia una única raíz, el flujo en la dirección radial hacia la raíz por unidad de longitud de raíz está dado (Nye y Tinker, 1977<sup>12</sup>) por:

$$v = -\pi r k(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1)$$

donde  $v$  es el flujo de agua ( $\text{cm}^3 \text{s}^{-1} \text{cm}^{-1}$ ),  $r$  es la distancia radial desde el centro de la raíz (cm) como se muestra en la Fig. 1,  $k$  es la conductibilidad hidráulica ( $\text{cm s}^{-1}$ ) y  $\psi$  es el potencial agua (cm). La ecuación de continuidad correspondiente es:

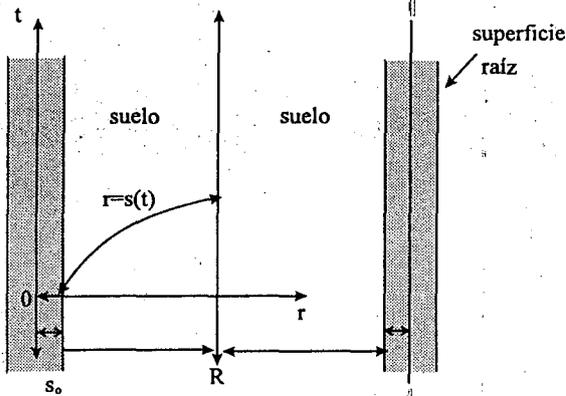


Fig. 1: (Ver texto).

$$2\pi \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial t} \quad (2)$$

donde  $\theta$  es el contenido de agua del suelo. Como  $\theta$  es función de  $\psi$ ,  $\theta = \theta(\psi)$  se cumple:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (3)$$

donde  $C(\psi)$  es la capacidad diferencial de humedad del suelo y donde se asume que el suelo no presenta histéresis en el humedecimiento y secado del mismo ( $\psi$  es función univaluada).

Reemplazando la ecuación (3) en la ecuación (2) y teniendo en cuenta la ecuación (1) resulta:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{k(\psi)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial k(\psi)}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + k(\psi) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \quad (4)$$

Las relaciones entre  $k$ ,  $\psi$  y  $\theta$  están dadas (Campbell, 1974<sup>13</sup>) por:

$$\psi = \psi_e \left( \frac{\theta}{\theta_s} \right)^{-b} = \psi_0 \theta^{-b} \quad \text{con } \psi_0 = \psi_e \theta_s^b \quad (5)$$

$$k(\psi) = k_s \left( \frac{\psi_e}{\psi} \right)^n = k_0 \psi^{-n} \quad \text{con } k_0 = k_s \psi_e^n \quad (6)$$

donde  $\psi_e$  es el potencial suelo-agua de entrada de aire (cm),  $\theta_s$  es el contenido de saturación suelo-agua ( $\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$ ),  $k_s$  es la conductividad hidráulica saturada del suelo,  $-b$  es la pendiente de la curva característica suelo-agua  $\psi = \psi(\theta)$  en un sistema coordenado log-log y,  $n$  es la pendiente de la curva  $k(\psi)$  en un sistema coordenado log-log.

De la ecuación (5) se obtiene la relación inversa:

$$\theta = \theta_s \psi^{-(1/b)} \quad \text{con } \theta_s = \psi_e^{(1/b)} \theta_s \quad (7)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (6) para  $\partial k / \partial \psi$  y la ecuación (7) para  $C(\psi)$ , la ecuación (4) puede expresarse:

$$-\alpha \psi^{(1-n+1/b)} \frac{\psi_r}{r} + \beta \psi^{(-n+1/b)} \psi_r^2 - \alpha \psi^{(1-n+1/b)} \psi_{rr} = \psi_t \quad (8)$$

donde:  $\psi_r = \partial \psi / \partial r$ ,  $\psi_{rr} = \partial^2 \psi / \partial r^2$ ,  $\psi_t = \partial \psi / \partial t$ . Con estas suposiciones, el crecimiento de raíces de cultivos es dado por el siguiente modelo de frontera libre (en coordenadas cilíndricas) por:

$$-\alpha \psi^{(1-n+1/b)} \frac{\psi_r}{r} + \beta \psi^{(-n+1/b)} \psi_r^2 - \alpha \psi^{(1-n+1/b)} \psi_{rr} = \psi_t, \quad s(t) < r < R, 0 \leq t \leq T, \quad (9.i)$$

$$\psi(r, 0) = \phi(r), \quad s_0 \leq r \leq R, \quad (9.ii)$$

$$\psi(R, t) = \psi_R, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9.iii)$$

$$-2\pi s(t) k(\psi(s(t), t)) \psi_r(s(t), t) = \pi s^2(t) G(\psi(s(t), t)), \quad 0 < t < T, \quad (9.iv)$$

$$F_r \pi s^2(t) S_{\max} = \psi(s(t), t) \frac{ds(t)}{dt}, \quad 0 < t < T \quad (9.v)$$

$$s(0) = s_0, \quad 0 < s_0 < R \quad (9.vi)$$

donde  $G(\psi)$  es la función extracción de agua por la raíz (Feddes, 1978<sup>14</sup>) con  $G(\psi)$  definida como:

$$G(\psi) = 0 \quad \text{para } 0 > \psi_s > \psi_1 \quad \text{con } \psi_1 = \text{potencial agua punto anaerobiosis}$$

$$G(\psi) = S_{\max} \quad \text{para } \psi_1 > \psi_s > \psi_2 \quad \text{con } \psi_2 = \text{potencial agua punto límite}$$

$G(\psi) = S_{\max} (\psi_s - \psi_3) / (\psi_2 - \psi_3)$  para  $\psi_2 > \psi_s > \psi_3$   
 con  $\psi_3 =$  potencial agua punto de marchitez.

$$G(\psi) = 0 \quad \text{para } \psi_3 > \psi_s, \quad (10)$$

$T$  es el tiempo para el cual existe solución. La ecuación (9.i) es la ecuación de conducción hidráulica expresada en términos del potencial agua  $\psi$ ; teniendo en cuenta la dependencia de la misma del contenido de agua de suelo  $\theta$ . La ecuación (9.ii) es el perfil inicial de potenciales entre la raíz y el radio del cilindro de suelo  $R$  de donde extrae agua la raíz. La ecuación (9.iii) es la condición de contorno sobre  $R$  representando un potencial agua constante (como podría ser el obtenido bajo condiciones de riego por goteo). La ecuación (9.iv) representa el balance de energía por unidad de masa dado a través del potencial agua donde el primer miembro de la izquierda representa el flujo sobre la raíz, el término de la derecha el mismo flujo a través de la absorción de agua por la raíz, mientras que la ecuación (9.v) representa el mismo balance expresado en función de la velocidad de crecimiento  $ds(t) / dt$ . La ecuación (9.vi) es la condición inicial para la frontera libre  $s(t)$ .  $F_r$  es la fracción de agua incorporada usada por el metabolismo radical para el crecimiento.

Las dos condiciones de frontera libre (9.iv) y (9.v) pueden ser escritas (para  $G(\psi) = S_{\max}$ ) y para el caso de suelos arcillosos ( $n = 2$ ) como:

$$\psi_r(s(t), t) = g(\psi(s(t), t)) = -\frac{s}{2k_0} S_{\max} \psi^2(s) \quad (11)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = f(\psi(s(t), t)) = -F_r \pi \frac{s^2}{\psi(s)} S_{\max} \quad (12)$$

y para  $G(\psi) = S_{\max} (\psi_s - \psi_3) / (\psi_2 - \psi_3)$  como:

$$g(\psi) = As[\psi_3 \psi_s^2 - \psi^3] \quad \text{con } A = -\frac{S_{\max}}{2k_0(\psi_2 - \psi_3)} \quad (13)$$

$$f(\psi) = Bs^2[1 - \frac{\psi_3}{\psi_s}] \quad \text{con } B = \frac{-F_r \pi S_{\max}}{\psi_2 - \psi_3} \quad (14)$$

Para resolver el modelo de frontera libre (9.i, ii, iii, iv, v, vi) aplicamos el método cuasiestacionario (Stefan, 1889<sup>15</sup>; Carslaw and Jaeger, 1959<sup>16</sup>; Tarzia, 1984<sup>17</sup>), a través del cual se resuelve la ecuación (9.i) con  $\psi_r = 0$  junto a las restantes ecuaciones (9.ii, iii, iv, v, vi) (Este método contiene implícitamente todos los modelos de capilaridad que relacionan  $n$  con  $b$  y en particular, el modelo válido para suelos con bajos contenido de agua ( $n = 1+3/b$ ) (Alexander y Skagg, 1986<sup>18</sup>) lo que produce las siguientes soluciones para  $G(\psi) = S_{\max}$ :

$$\psi(s(t), t) = \left[ \frac{1}{\psi_R} + \frac{s^2 S_{\max}}{2k_0} \ln \frac{s}{R} \right]^{-1} \quad (15)$$

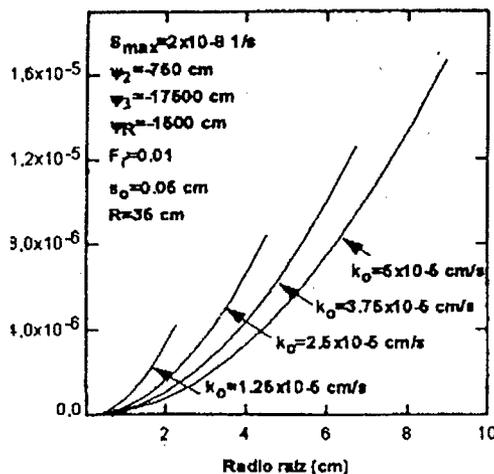


Fig. 2: (Ver texto).

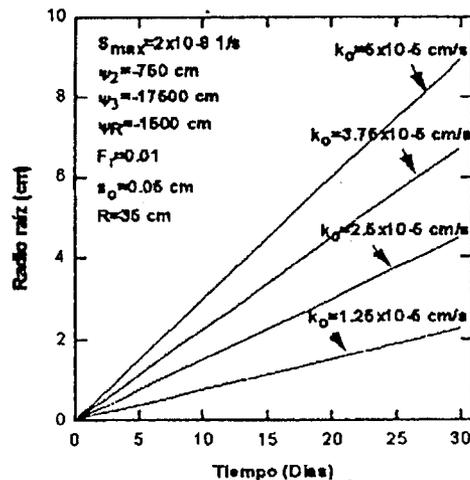


Fig. 3: (Ver texto).

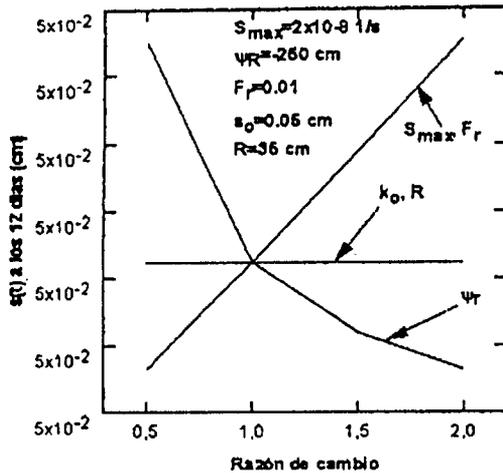


Fig. 4: (Ver texto).

$$\frac{ds(t)}{dt} = -F_r s^2 S_{max} \left[ \frac{1}{\psi_R} + \frac{s^2 S_{max}}{2k_o} \ln \frac{s}{R} \right]^{-1} \quad (16)$$

y para  $G(\psi) = S_{max}(\psi_s - \psi_3)/(\psi_2 - \psi_3)$  las siguientes soluciones:

$$\psi(s(t), t) = \left\{ \frac{1}{\psi_R} - \left[ \frac{1}{\psi_R} + As^2 \psi_3 \ln \left( \frac{s(t)}{R} \right) \right] \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{1}{\psi_R} + As^2 \psi_3 \ln \left( \frac{s(t)}{R} \right) - 4 \ln \left( \frac{s(t)}{R} \right) As^2 \left( \frac{\psi_3}{\psi_R} - 1 \right)} / 2 \right\}^{-1}$$

(17)

$$f(\psi) = Bs^2 \left[ 1 - \frac{\psi_3}{\psi_s} \right] \text{ con } \psi_s \text{ dada por (17).}$$

(18)

Las ecuaciones (16) y (18) son resueltas por

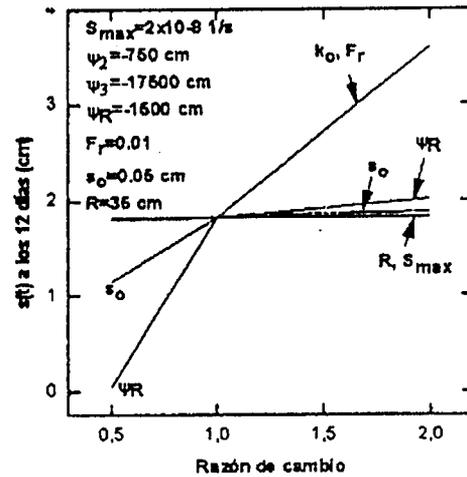


Fig. 5: (Ver texto).

el método de Runge-Kutta para ecuaciones diferenciales ordinarias y las Figs. 2 y 3 muestran algunos resultados teóricos para el potencial agua en la interfase raíz-suelo vs. radio-raíz así como la frontera libre  $s(t)$  vs. tiempo en función de algunos parámetros característicos del sistema suelo-agua-planta como la conductibilidad hidráulica  $k_o$  para el caso de toma de agua proporcional a  $\psi$ .

Un análisis más detallado del efecto de los restantes parámetros se muestran en los siguientes diagramas de sensibilidad paramétrica en los cuales se varían cada uno de los parámetros con los restantes permaneciendo constantes en los valores 0.5, 1, 1.5 y 2 como se muestra en las Figs. 4 y 5 que ilustran el crecimiento radial a los 12 días para los casos de toma de agua constante y toma de agua variable linealmente con  $\psi$ , respectivamente.

### III. CONCLUSIONES

De un análisis más completo de los resultados, se concluye que el crecimiento radial es lineal para ambos casos de toma de agua constante y variando linealmente con el potencial agua. Asimismo se encuentra que la eficiencia del mecanismo de absorción para el crecimiento radial es mayor en el caso de toma de agua proporcional al potencial agua. Debe remarcarse que, aunque las soluciones obtenidas solo brindan una aproximación cualitativa de la situación real y el modelo sólo ha sido desarrollado para suelos arcillosos, estas conclusiones son útiles

para el diseño de modelos mas complejos (por ejemplo, en cualquier tipo de suelos) que predigan la toma de agua en forma mas precisa, así como para la instrumentación de técnicas agrícolas que permitan optimizar el funcionamiento de cultivos desde el punto del aprovechamiento del agua del suelo.

## REFERENCIAS

1. Van den Honert, T.H. *Water transport in plants as a catenary process*. Discuss. Faraday Soc. 3, 146-153 (1948).
2. Gardner, W.R. *Dynamic aspects of water availability to plants*. Soil Sci. 89, 63-73 (1960).
3. Newman, E.I. *Resistance to water flow in soil and plant. I. Soil resistance in relation to amounts of root: theoretical estimates*. J. Appl. Ecol. 16, 1-12 (1969).
4. Herkelrath, W. N., Miller, E. E. y Gardner W. R. *Water uptake by plants; II. The root contact model*. Soil Sci. Soc. Am. J. 41, 1039-1043 (1977).
5. Weatherley, P. E. *The hydraulic resistance of the soil-root interface: a cause of water stress in plants. The soil-root interface symposium*, Oxford, England (1978).
6. Newman, E. I. *Interaction between osmotic and pressure-induced flow in plant roots*. Plant Physiol. 57, 738-739 (1978).
7. Fiscus, E. L. *Effects of coupled solute and water flow in plant roots with special reference to Brouwe's experiment*. J. Exp. Bot. 28, 71-77 (1977).
8. Passioura J. B. *The transport of water from soil to shoot in wheat seedlings*. J. Exp. Bot. 31, 333-345 (1980).
9. Reginato J. C., Tarzia D. A. y Cantero A. *On the free boundary problem for the Michelis-Menten absorption model for root growth*. Soil Sci. 150 (4), 722-729 (1990).
10. Reginato J. C., Tarzia D. A y Cantero A. *On the free boundary problem for the Michelis-Menten absorption model for root growth. High concentrations*. Soil Sci. 150 (4), 61-72 (1991).
11. Reginato J. C., Tarzia D.A. *The balance integral method applied to root growth of crops*. Int. J. Engng. Sci. 31 (1), 61-70 (1993).
12. Nye P. H. y Tinker P. B. *Solute movement in the soil-root system*. Studies in Ecology Vol. 4. University of California Press, Berkeley (1977).
13. Campbell, G. S. *A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data*. Soil Sci. 117, 311-314 (1974).
14. Feddes R. A., Kowalik, P. J., Malinka, K. K y Zaradny, H. *Simulation of field water use and crop Yield*, Centre for Agricultural Publishing and Documentation, Wageningen, the Netherlands (1978).
15. Stefan J. *Über einige probleme der theorie der wärmeleitung*. Zitzungberichte der Kaiserlichen Akademic der Wissenschaften Mathematisch-Naturwissenschaftliche classe 98, 473-484 (1889).
16. Carlaw H. S y Jaeger J. C. *Conduction of heat in solids*. Clarendon Press, Oxford (1959).
17. Tarzia D. A. *A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan Problem*. Progetto Nazionale M.P.I. Equazioni di evoluzione e applicazione fisico-matematiche. Firenze, Italy (1988).
18. Alexander L.; Skaggs R. G. *Predicting unsaturated hydraulic conductivity from the soil water characteristics*. Trans. ASAE 29, 176-184 (1986).