

INTERPRETACIÓN GRAVIMÉTRICA MEDIANTE ALGORITMOS DE MÁXIMA ENTROPÍA

R. Rolon, F. Guspí y A. Introcaso

Grupo de geofísica, Instituto de Física Rosario, Boulevard 27 de Febrero 210 bis (2000) Rosario.

El cálculo de espectros de potencia por el método de máxima entropía (MEM), fue diseñado originalmente para el procesamiento de señales. Sin embargo, su buena resolución frente a otros métodos (ej. FFT), combinada con la característica de los campos potenciales (ecuac. de Laplace), lo convierte en una herramienta atractiva para la interpretación de perfiles gravimétricos bidimensionales (2D). En esta línea se implementan algoritmos que permiten estimar con criterio físico, la profundidad y magnitud de las masas causantes de un campo anómalo y de esta manera proceder a la separación de anomalías regionales y residuales mediante un filtro de Wiener. En los perfiles de gran longitud tal separación demuestra ser superior a la obtenida por criterios puramente estadísticos, como ajuste polinómico o corte de frecuencias. Recientes mediciones de IFIR, U. N. de San Juan y U. N. de La Plata, sirven de base para aplicar algoritmos a un perfil gravimétrico transcontinental en la Lat. 51° Sur. Separada la anomalía regional de Bouguer, se determina, por inversión, una raíz andina de 47 km, que compensa razonablemente la menor elevación de la cordillera de estas latitudes.

I. INTRODUCCIÓN

El uso del análisis espectral para el procesamiento de señales ha sido muy difundido en los últimos tiempos, es por eso que han salido a la luz numerosos métodos variando en general distintos aspectos de este tipo de análisis como la resolución del espectro, largos de entrada de la muestra, obtención de coeficientes, etc. Se ha usado en la interpretación de muchos temas, algunos de los cuales son campo de gravedad y magnetismo como también en problemas relacionados con la ionosfera. En problemas gravimétricos una dificultad clásica en la interpretación de anomalías de Bouguer, es la separación adecuada de la componente regional (asociada a anomalías de longitudes de onda larga provenientes de masas a grandes profundidades), y la componente residual (asociada a anomalías de onda corta provenientes de masas a poca profundidad).

Uno de los estimadores más originales es el de Máxima Entropía (MEM), presentado por Burg¹. Su origen no es geofísico, sin embargo, su aporte tiene considerable valor no sólo en aplicaciones a micro-pulsaciones geomagnéticas, sino también a cualquier serie temporal como las que aparecen en sísmica, pues la estimación del espectro de potencia resulta más confiable que la de otros métodos, sobre todo para un largo de entrada de datos corto.

La utilidad del MEM está limitada por carecer de un criterio para escoger la longitud del filtro de predicción de error (FPE), pero sabemos que acortarlo resulta en una estimación demasiado suavizada, y alargar esa longitud introduciría detalles poco claros en el espectro. Otro defecto del MEM sería el hecho de carecer de una variancia estimada para

el estimador de densidad espectral.

Van der Bos² mostró que la extrapolación de la autocorrelación de un proceso maximizando la entropía de la correspondiente función de densidad de probabilidad, parte esencial del MEM, es el ajuste de Mínimos Cuadrados adecuado de un modelo autorregresivo (AR) para el proceso. Esta posibilidad nos ha permitido aplicar todo lo investigado en AR para sobrellevar los defectos vistos anteriormente.

A pesar de la buena resolución espectral del MEM, no hemos encontrado aplicaciones gravimétricas en la literatura y vemos que el análisis espectral se realiza generalmente empleando la Transformada de Fourier (FFT), Khan y Agarwal³.

El presente trabajo intenta mostrar las ventajas y utilidades de emplear el MEM en gravimetría para hallar los parámetros que determinan el filtro separador de Wiener, y aplicarlo al caso concreto de un perfil de anomalías de Bouguer medidas en la Patagonia.

II. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

Entropía es un concepto usado en mecánica estadística, es una medida de la casualidad de un sistema o de la incerteza de nuestro conocimiento acerca del estado de un sistema, surge también de la teoría de la información donde mide la información promedio contenida en un mensaje, Woodward⁴, podemos decir también que son bien conocidos problemas de los cuales la entropía de una distribución es maximizada y sujeta a condiciones. Si, por ejemplo, la condición es que una distribución tiene cua-

drado medio dado, la distribución entropía máxima es una gaussiana. Para el cálculo de variaciones se puede aplicar también este método, la condición será que el espectro de densidad de potencia debe coincidir con el Teorema de Wiener: "la Transformada de Fourier de la densidad espectral es igual a la función autocorrelación de la serie temporal observada". La función entropía a ser maximizada es el Logaritmo de la densidad espectral integrada sobre el rango de frecuencias; la forma específica de la función entropía puede ser obtenida desde el cambio de entropía que ocurre cuando una señal pasa a través de un filtro con una respuesta de señal dada. En este caso el, cambio en entropía es la integral del Logaritmo del cuadrado de la respuesta del filtro. El espectro de máxima entropía está formulado por determinación de la densidad espectral $P(f)$ que maximiza la cantidad,

$$E = \int_{-f_0}^{f_0} \text{Ln } P(f) df \quad (1)$$

la condición será que la autocorrelación $C(\tau)$ está dada por:

$$C(\tau) = \int_{-f_0}^{f_0} P(f) e^{i 2\pi f \tau} df \quad (2)$$

donde $f_0 = (2\Delta t)^{-1}$, es la frecuencia de Nyquist; $\tau = n\Delta t$, donde $n = 0, 1, 2, \dots, N$; N mide el máximo retraso temporal de la autocorrelación y el orden del espectro. El maximizar la integral del Logaritmo de la densidad espectral es equivalente a la construcción de un filtro el cual limpia la señal y maximiza el cambio de entropía a través del filtro. Ahora vemos que el filtro de máxima entropía está relacionado con el filtro de error por unidad de tiempo, Peacock⁵. La salida de este filtro no es una predicción de la señal de entrada, sino que es el error entre lo conocido y la señal predicha. Debido a que el filtro incluye encontrar los coeficientes de predicción o los coeficientes de autorregresión el espectro también ha sido llamado estimador espectral autorregresivo, Paerzen⁶. Si conocemos los coeficientes del filtro que limpian la señal, entonces el espectro está determinado por el recíproco del cuadrado de la respuesta de ese filtro, supongamos que esa respuesta es $G(w)$ y la amplitud espectral de la señal es $X(w)$, entonces el filtro tiene el efecto de,

$$G(w) \cdot X(w) = C \quad (3)$$

$C = \text{cte. de amplitud de ruido; la densidad del espectro}$

de potencia de la señal es proporcional a $X^2(w) = C^2/G^2(w)$, el problema será, entonces, determinar los coeficientes de predicción de error. Los coeficientes estarán determinados por un conjunto de $N+1$ ecuaciones para $N+1$ coeficientes. Este conjunto de ecuaciones pueden ser puestas en forma de una ecuación matricial en la cual están los elementos de la función autocorrelación y como vector los coeficientes de predicción de error. La densidad espectral y esos coeficientes G_i están dados por,

$$P(f) = \frac{\Delta t \cdot P_{N+1}}{\left| \sum_{K=0}^N (G_{K+1} \cdot Z^K) \right|^2} \quad (4)$$

$$\sum_{j=0}^N \phi_{Kj} \cdot G_{j+1} = P_{N+1} \cdot \delta_{K,0} \quad (5)$$

$Z = \exp[i2\pi f \Delta t]$; $G_1 = 1$; $K = 0, 1, 2, \dots, N$. La matriz ϕ_{Kj} está construida desde la función autocorrelación $C(\tau) = C(n\Delta t)$ uniendo $n = K - j$ y $\phi_{Kj} = C(|K - j| \Delta t)$; P_{N+1} representa la potencia de salida media del filtro de predicción de error conteniendo $N+1$ coeficientes. La ecuación (5) puede ser resuelta por inversión de la matriz autocorrelación. No obstante se guardan órdenes de magnitud usando las relaciones de recursión de Levinson entre los coeficientes para matrices de orden N y $N+1$. Si $G^{(N)}_j$ es el coeficiente del j -ésimo obtenido desde una matriz de orden N , entonces los coeficientes del próximo caso están dados por,

$$G_j^{(N+1)} = G_j^{(N)} + G_{N+1}^{(N+1)} \cdot G_{N+2-j}^{(N)} \quad (6)$$

donde $j = 2, \dots, N$. Se especifica solamente el último coeficiente, $G_{N+1}^{(N+1)}$ y el resto están definidos en términos de éste.

El método de Levinson que incluye el cálculo de la matriz autocorrelación, que es una buena aproximación, implica dividir la suma de los retrasos temporales por el N° total de datos. Entonces el coeficiente final, estará determinado por este método y en la siguiente forma,

$$G_{N+1}^{(N+1)} = - \sum_{j=0}^{N-1} C(j+1) \cdot G_{N-j}^{(N)} / P_N \quad (7)$$

la relación de recursión para el error de potencia

media es,

$$P_{N+1} = P_N [1 - (G_{N+1}^{(N+1)})^2] \quad (8)$$

El otro método es el de Burg; tiene la ventaja de no usar cualquier aproximación de la función autocorrelación. Esta técnica minimiza el error potencial entre la señal actual y la señal predicha. El filtro de predicción de error está aplicado de tal forma que avanza y retrocede. Los resultados de las ecuaciones (6) y (8) son usados para calcular la aproximación espectral dada en la ecuación (4). La función a minimizar será,

$$P_N = [2(M - N + 1)]^{-1} \left[\sum_{j=N}^M \left(\sum_{i=1}^N G_i X_{j-i+1} \right)^2 + \sum_{j=1}^{M-N+1} \left(\sum_{i=1}^N G_i X_{j+i-1} \right)^2 \right] \quad (9)$$

donde $+N$: N° de términos del filtro y M : N° de datos

Esta técnica produce un espectro de muy alta resolución y rango muy dinámico.

- EMPLEO EN GRAVIMETRÍA

Los fundamentos pueden consultarse en: Spector y Grant⁷, Jacobsen⁸, Khan y Agarwal³, etc. Ninguno de estos autores calcula el espectro por el procedimiento MEM. La idea básica, que surge de la teoría y también de la observación, es que el Logaritmo del espectro de un perfil presenta zonas de pendiente bien diferenciada: una más empinada, que se considera la regional, otra inclinada, que da la residual, y eventualmente una tercera horizontal que es ruido.

Ajustando por Mínimos Cuadrados las dos primeras, surgen cuatro valores característicos del perfil:

- m_r = masa regional
- z_r = profundidad regional
- m_s = masa residual
- z_s = profundidad residual

Ellos son los parámetros que caracterizan al filtro de Wiener que vamos a aplicar de tal manera que conocida la entrada $\hat{g}(\alpha)$ (Transformada de Fourier del perfil dado), obtengamos como salida óptima la Transformada de la anomalía regional

$\hat{g}_r(\alpha)$. La fórmula dada por Jacobsen⁸ es:

$$\hat{g}_r(\alpha) = \frac{\hat{g}(\alpha)}{1 + (m_s/m_r) \cdot \exp[4 \cdot \pi \cdot |\alpha| \cdot (z_r - z_s)]} \quad (10)$$

III. APLICACIÓN A UN PERFIL PATAGÓNICO

- OBTENCIÓN DE DATOS

La obtención de datos gravimétricos resultó de una campaña hecha en conjunto por la Universidad Nacional de San Juan y la Universidad Nacional de Córdoba en el año 1992; la misma se realizó entre los 69° y 73° Long. Oeste y los 49° y 52° Lat. Sur. Los datos del sector chileno se digitalizaron en un mapa de anomalías tomadas por Forsythe⁹, entre los 73° y 76° Long. Oeste y 49° y 52° Lat. Sur, se consideraron aquí las anomalías de Bouguer.

Del conjunto de datos medidos se separó un perfil de 82 puntos, el cual sigue casi exactamente la dirección O-E y cuyas anomalías proveen la señal de entrada.

Anomalías de Bouguer

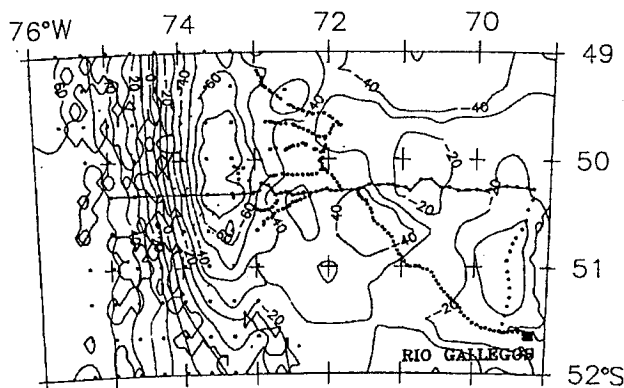


Figura 1: Perfil analizado, entre 69° y 76° Long. Oeste y entre 49° y 52° Lat. Sur. * Mediciones de IFIR, U.N. Córdoba y U.N. San Juan (1992). * Digitalizado de carta de Nelson I., Forsythe (1984). ---- Perfil analizado.

- PROCESAMIENTO

La aplicación del procedimiento MEM exige que los datos estén equiespaciados y medidos a una

altura uniforme; como los datos reales no cumplen estas condiciones, se realizó primeramente una regularización sobre 128 puntos con una separación de 3.4 Km y luego una reducción a nivel del mar, Guspí¹⁰. Para obtener el largo óptimo de coeficientes se hicieron varias pruebas, las cuales fueron con 30, 40, 50, 70 y 80 coeficientes. De la misma forma, para obtener el Logaritmo del espectro se probó con 50, 70 y 100 puntos. Combinando coeficientes y cantidades de puntos para el Logaritmo del espectro, la mejor combinación resultó ser, 80 coeficientes y 100 puntos para el Logaritmo.

Luego de obtener el Logaritmo del espectro se procedió a ajustar las curvas por Mínimos Cuadrados, pudiéndose trazar dos rectas perfectamente diferenciadas, la primera va desde 0 a 20 que corresponde a la anomalía regional y desde 20 a 60 ciclos/1000 Km que corresponde a la anomalía residual tomándose lo que sigue como ruido o proveniente de masas muy superficiales.

De esta forma se lleva a cabo la separación de esas anomalías mediante el filtro de Wiener de la Ecuac. (10).

- RESULTADOS

Se observa que la regional es suave pero sigue perfectamente la tendencia del perfil. Dado que éste es largo, y presenta zonas de diversa variación relativa, ésto hubiese sido difícil de lograr con un ajuste polinómico, por ejemplo. De aquí la ventaja del método espectral, que se basa en un criterio físico.

Para confirmar la bondad de la regional hallada, se consideró como hipótesis preliminar que las anomalías de gravedad se originan en un descenso de la discontinuidad de Mohorovicic o Moho, por ejemplo, Intocaso y Otros¹¹. Entonces el método no iterativo de inversión gravimétrica de Guspí¹² permite determinar en un modelo simplificado, la configuración de dicha discontinuidad. La raíz andina aquí, tiene 47 Km, que es un valor consistente con la altura de la cordillera en esa zona.

IV. CONCLUSIÓN

Vemos que el MEM resulta una herramienta poderosa en resolución de problemas gravimétricos pues corroboramos una vez más la muy buena resolución espectral con la que cuenta, además de la amplia facilidad con la que se pueden optimizar largos de filtros y cantidades de puntos para el Logaritmo del espectro. Todas las propiedades vistas anteriormente resultan en un considerable ahorro

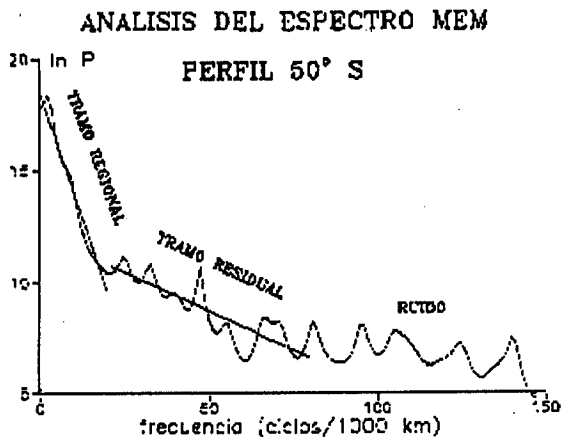


Figura 2: Logaritmo del espectro y Ajuste por Mínimos Cuadrados para obtener anomalías regional y residual.

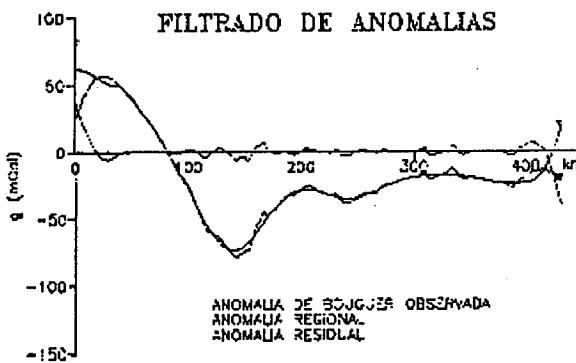


Figura 3: Aplicación del filtro de Wiener para la separación de anomalías.

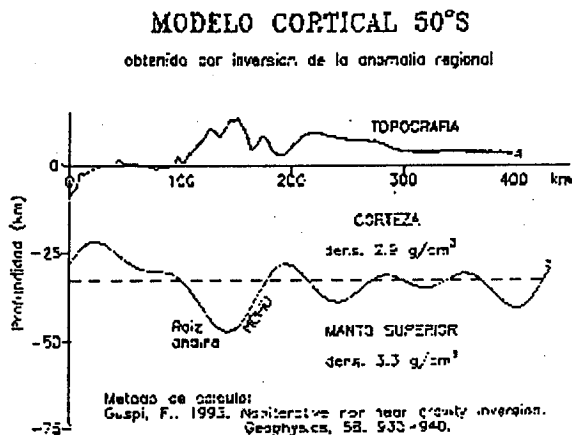


Figura 4: Configuración de la discontinuidad de Moho, luego de la inversión gravimétrica.

de tiempo en el procesamiento de datos, acompañado a una muy buena primera aproximación a la resolución del problema de configuraciones corticales en gravimetría.

REFERENCIAS

1. Burg, J.P., *37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists*, Oklahoma City, OKLAHOMA, (1967).
2. Van der Vos, A., *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-17, 493-494, (1971).
3. Khan, A. A. y Agarwal, B. N., *Tectonophysics*, 219, 341-353, (1993).
4. Woodward, P. M., Pergamon Press, Oxford, p. 49, (1964).
5. Peacock, K. L. y Treitel, S., *Geophysics* 34, 155, (1969).
6. Paerzen, E., *Academy Press*, New York, p. 404, (1969).
7. Spector, A. y Grant, F. S., *Geophysics*, 35, 293-302, (1970).
8. Jacobsen, B., *Geophysics*, 52, 1138-1148, (1987).
9. Nelson, I., Forsythe, *Antartic Journal of The U. S.*, vol. XIX, 1, 7-10, (1984).
10. Guspí, F., *Geoexploration*, 24, 87-98, (1987).
11. Introcaso, A., Pacino, M. C., Fraga, H., *Tectonophysics*, 205, 31-48, (1992).
12. Guspí, F., *Geophysics*, 58, 935-940, (1993).

