

ANÁLISIS DE LOS MODOS DE CHANDRASEKHAR-KENDALL DE UN FLUJO HELICOIDAL DE BELTRAMI

CHANDRASEKHAR-KENDALL MODES ANALYSIS OF AN HELICAL BELTRAMI FLOW

R. González ^{a,*}

a Instituto de Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento
Juan María Gutierrez 1150 – (1613) Buenos Aires – Argentina

Recibido: 21/11/2012; aceptado: 21/02/2013

Para un flujo helicoidal de Beltrami (tal que $\nabla \times \mathbf{v} = \gamma \mathbf{v}$, $\gamma = \text{constante}$) en un tubo semi- infinito, con el autovalor γ dado como una condición de entrada, los modos de Chandrasekhar-Kendall en que este flujo puede descomponerse, como una función del número de Rossby, son determinados mediante las condiciones de contorno. Se aplica el principio variacional de Benjamin en coordenadas helicoidales en orden a discutir la posible bifurcación de modos.

Palabras clave: flujo helicoidal, Beltrami, principio variacional.

For an helical Beltrami flow (such that $\nabla \times \mathbf{v} = \gamma \mathbf{v}$, $\gamma = \text{constant}$) in a semi-infinite pipe, with the eigenvalue γ given as an inlet condition, the Chandrasekhar-Kendall modes in which this flow can be decomposed, as a function of the Rossby number, are determined by the boundary conditions. The Benjamin variational principle¹ in helical coordinates is applied in order to discuss possible mode bifurcations.

Keywords: helical flux, Beltrami, variational principle.

I. INTRODUCCIÓN

En trabajos previos^{2,3} hemos considerado flujos rotantes pasando de un cilindro a otro de mayor radio a través de una expansión axisimétrica. Dado un flujo formado por una rotación sólida más una translación uniforme, aguas arriba, el flujo aguas abajo de la expansión es un flujo de Beltrami en un sistema solidario con la roto-translación. En este trabajo consideramos un flujo de Beltrami en un tubo semi-infinito, que resulta de una etapa previa y para el cual su autovalor γ viene dado como una condición de entrada y determinado en la etapa previa. Por lo tanto el flujo de Beltrami puede descomponerse en una base de Chandrasekhar-Kendall (Ch-K)²⁻⁶ con simetría helicoidal, correspondiendo a cada modo Ch-K, un parámetro k (que dependerá de números discretos en función de las condiciones de contorno) que determina el paso de la hélice como $p = 2\pi/k$. El valor de γ viene determinado esencialmente por los parámetros dados aguas arriba por la velocidad de rotación Ω y la velocidad axial de translación U como $\gamma = 2\Omega/U$. Tomando una longitud característica, en este caso en radio del tubo semi-infinito a , podemos colocar este parámetro como función del número de Rossby $\mathcal{R} = U/(a\Omega)$, es decir $\gamma = 2/\mathcal{R}$.

En este trabajo desarrollamos tres secciones, sobre la descripción previa. En la sección 2 introducimos los modos Ch-K con simetría helicoidal y obtenemos el parámetro k correspondiente a cada modo en base a la condición de borde que consistirá en la anulación de la velocidad radial sobre la pared del tubo y en función del número de Rossby \mathcal{R} .

En la sección 3 introducimos el principio variacional de Benjamin con simetría helicoidal^{1,5} y obtenemos los gráficos de la funcional de energía definida para cada modo como función del número de Rossby \mathcal{R} . De esta forma podemos hacer un análisis comparativo de la prevalencia de los modos para cada \mathcal{R} .

En la sección 4 presentamos los resultados y en la sección 5 las conclusiones.

II. ANÁLISIS DE LOS MODOS DE CHANDRASEKHAR-KENDALL

Como fue discutido en la introducción, consideramos un flujo de Beltrami del tipo $\nabla \times \mathbf{v} = \gamma \mathbf{v}$ en un tubo semi-infinito, desde un sistema de referencia trasladándose con velocidad U y girando con velocidad Ω constantes, de tal forma que el autovalor γ venga

*rgonzale@ungs.edu.ar

determinado a la entrada y sea $\gamma = 2U/\Omega$. Introduciendo las funciones de corriente y de vorticidad $\psi(r, \phi)$, $\chi(r, \phi)$, $\phi = \theta - kz$, siendo $2\pi/k$ el paso de la hélice, es posible definir el campo de velocidades con simetría helicoidal de la siguiente forma:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad v_\phi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (1a)$$

$$\omega_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \phi}, \quad \omega_\phi = -\frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad (1b)$$

$$v_\theta = \frac{1}{h} (kr\chi - \frac{\partial \psi}{\partial r}), \quad (1c)$$

$$v_z = \frac{1}{h} (\chi + kr \frac{\partial \psi}{\partial r}), \quad h = 1 + k^2 r^2. \quad (1d)$$

Para un flujo de Beltrami se verifica que $\chi = \gamma \psi^{1,5,6}$ y constituye una solución estacionaria de la ecuación de Euler en el sistema roto-traslatorio considerado previamente^{2,3,5,6}. Finalmente este flujo puede ser desarrollado en una base de Chandrasekhar-Kendall²⁻⁶:

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos(m\phi + \phi_0), \quad (2a)$$

$$f_m = J_m(\mu_m r) - \frac{k\mu_m r}{\gamma} J'_m(\mu_m r), \quad (2b)$$

$$\mu_m = (\gamma^2 - m^2 k^2)^{1/2}. \quad (2c)$$

La condición de contorno en la pared del tubo es:

$$v_r(a) = 0. \quad (3)$$

De aquí surgen infinitos modos para cada m a los que corresponderán parámetros k_{mn} , con m, n naturales.

III. PRINCIPIO DE ENERGÍA PARA LOS MODOS Ch-K

El flujo de Beltrami visto desde el sistema roto-traslatorio responde a una forma particular de la ecuación de Bragg-Harthon^{5,6,7}:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\gamma^2 \psi}{1 + k^2 r^2} - \frac{2k\gamma\psi}{(1 + k^2 r^2)^2} = 0. \quad (4)$$

Esta ecuación, para cada modo, puede ser obtenida anulando la derivada variacional de la siguiente expresión:

$$E_{mn} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\psi_{mn,r}^2 + \frac{h}{r^2} \psi_{mn,\phi}^2 - 2\gamma k_{mn} r \psi_{mn,r} \psi_{mn} - \right.$$

$$\left. - \gamma^2 \psi_{mn}^2 \right] \frac{r}{h_{mn}} d\phi dr, \quad (5)$$

donde ψ_{mn} son los modos obtenidos al aplicar la condición de borde dada por la ec. 3 en base a las ecuaciones ec. 1a y ecs. (2a-2c), y que, como soluciones de la ec. 4, expresan un mínimo de la funcional¹. Expresión que, adimensionalizada e integrada con respecto a la variable angular cobra la forma:

$$E_{mn} = \int_0^1 \left[f_{mn,r}^2 - 2k_{mn} \gamma f_{mn,r} f_{mn} + \left(\frac{h}{r^2} m^2 - \gamma^2 \right) f_{mn}^2 \right] \frac{r}{h_{mn}} dr, \quad (6)$$

donde $\gamma = 2/9$.

Por otro lado la funcional para el caso axisimétrico es:

$$E_0 = \int_0^1 \left[\psi_{,r}^2 - \gamma^2 \psi \right] \frac{1}{r} dr, \quad \psi = r J_1(\gamma r). \quad (7)$$

A partir de las ecs. (6,7) podemos representar las funcionales en función del número de Rossby y determinar los modos que prevalecen, que serán aquellos que alcancen el menor valor para un Ω dado.

IV. RESULTADOS

Los resultados obtenidos se presentan en los siguientes gráficos.

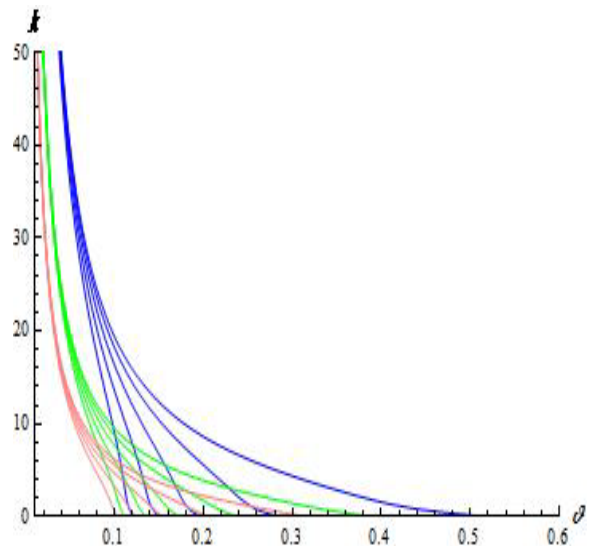


Figura 1. Parámetro k de la hélice como función del número de Rossby, correspondientes a los modos $m=1$, $m=2$ y $m=3$. Para cada m representado por un color, los números n crecen hacia la izquierda en forma monótona.

En la figura 1 vemos que el parámetro k crece a partir de $k=0$ y se deriva del modo axisimétrico. Para cada modo m , los sub-modos n tienden a agruparse entre sí asintóticamente a medida que ϑ decrece, observándose entonces, una clara diferenciación entre modos m .

En la figura 2 se representa la funcional de energía para los modos $m=0,1,2,3$, y los submodos $n=1,2,3,4,5$. La relación entre los modos $m=0,1,2$ se observa en la figura 3. Se ve que para $m=1$ (azul) a partir del $n=2$, cada sub-modo nace en un cero del modo $m=0$ (rojo). Y a su vez para $m=2$ (verde) a partir de $n=3$, cada sub-modo nace un cero de $m=0$ (rojo) y se va correspondiendo con los ϑ de los picos de los sub-modos de $m=1$ (azul). El mismo tipo de relación se da

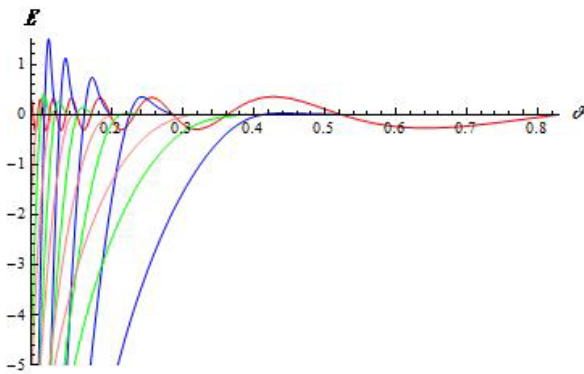


Figura 2. Funcional de energía dividida por el cuadrado de su amplitud, de los modos, $m=0$, $m=1$, $m=2$ y $m=3$. Sobre el eje ϑ , para cada m , los números n , correspondientes a los submodos, crecen hacia la izquierda en forma monótona.

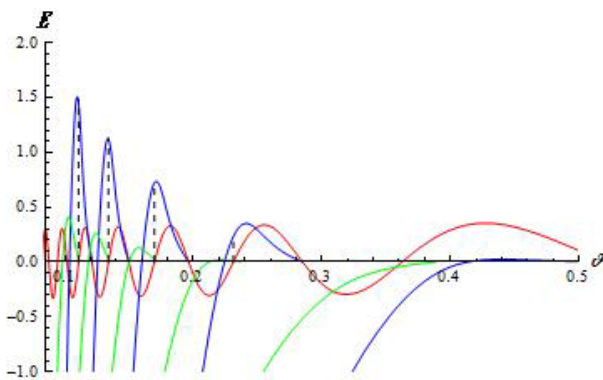


Figura 3. Funcional de energía dividida por el cuadrado de su amplitud, de los modos, $m=0$, $m=1$, $m=2$. Los submodos indicados por n se ordenan como se señala en las figuras previas.

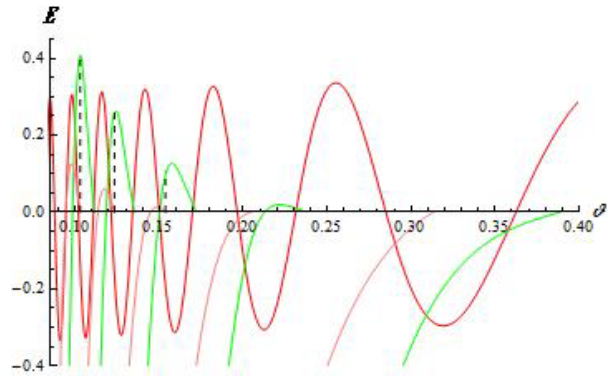


Figura 4. Funcional de energía dividida por el cuadrado de su amplitud, de los modos, $m=0$, $m=2$, $m=3$. Los submodos indicados por n se ordenan como se señala en las figuras previas.

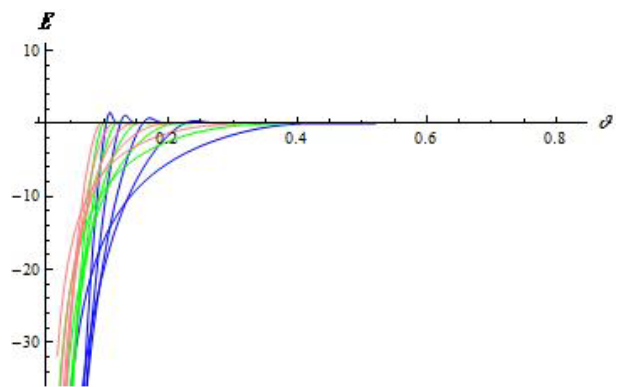


Figura 5. Funcional de energía dividida por el cuadrado de su amplitud, de los modos, $m=1$, $m=2$, $m=3$. Los submodos indicados por n se ordenan como se señala en las figuras previas.

entre los modos $m=0,2,3$ a partir de los sub-modos $n=3$. Cada sub-modo de $m=3$ (púrpura) nace en un cero de $m=0$ (rojo) y se va correspondiendo con el pico de $m=2$ (verde) lo que sugiere una relación fractal entre los sub-modos de modos sucesivos (figura 4).

Finalmente en la figura 5 se observa la relación entre las funcionales de energía de cada modo en función de ϑ . El modo $m=1$ (azul) es el que decrece más rápidamente cuando ϑ decrece resultando el modo predominante. Cuando ϑ decrece, los sub-modos del modo $m=1$ se entrecruzan de forma que la funcional va tomando valores más bajos a medida que n crece, convirtiéndose así en el modo prevaleciente. Lo mismo ocurre con los sub-modos de $m=2$ (verde) y $m=3$ (púrpura).

Se observa que los intervalos de ϑ correspondientes a los sub-modos de los distintos modos m , son de longitud decreciente con m .

V. CONCLUSIONES

- 1- Para cada modo $m \geq 1$, hay infinitos sub-modos n a los que corresponden parámetros de hélice k_{mn} que dependen de ϑ (Fig 1).
- 2- A medida que ϑ decrece para un modo dado m , los sub-modos n aparecen cuando $k_{mn}(\vartheta_{mn})=0$ y corresponden a una bifurcación del modo axisimétrico (Fig 1).
- 3- En relación con los modos m , sus primeros sub-modos $n=1$, aparecen en una relación decreciente con ϑ es decir si m aumenta, el correspondiente ϑ_{m1} para el cual $k_{m1}(\vartheta_{m1})=0$ disminuye. El primer modo en emerger es $m=1, n=1$, para $\vartheta_{11}=0.52$. Es decir que no hay una bifurcación de modos para ϑ mayores en esta configuración.
- 4- En relación con los sub-modos para cada $m \geq 1$, estos emergen de tal forma que los ϑ_{mn} para los cuales $k_{mn}(\vartheta_{mn})=0$ forman una sucesión con $\vartheta_{m(n+1)} < \vartheta_{mn}$.
- 5- Los intervalos entre sub-modos sucesivos para un modo dado m , son de longitud decreciente con m , es decir: $\vartheta_{(m+1)n} - \vartheta_{(m+1)(n+1)} < \vartheta_{mn} - \vartheta_{m(n+1)}$
- 6- Para cada modo $m \geq 1$ los sub-modos $k_{mn}(\vartheta)$ se agrupan de una forma asintótica para $\vartheta \rightarrow 0$. Este agrupamiento sigue un orden decreciente de m con respect a ϑ , es decir a medida que ϑ decrece, aparece primero el grupo correspondiente a $m=1$, luego el de $m=2$ y así sucesivamente (Fig. 1).
- 7- La comparación de la funcional de energía de los modos se posibilita en la Fig. 2. En la Fig. 3 se observan los mínimos de la funcional en función de ϑ para los modos $m=1, 2$, y en la Fig. 4 para los modos 2,3. En la Fig. 3 vemos que cuando ϑ decrece los valores ϑ_{2n} para los cuales $k_{2n}(\vartheta_{2n})=0$ tienden a coincidir con los valores de ϑ correspondientes a los picos de los sub-modos $m=1$, a partir de $n=2$. Lo mismo ocurre para la relación entre los modos $m=2, 3$, a partir de $n=3$, Fig. 4. Estas relaciones sugieren una relación de autosimilaridad entre los modos m sucesivos.
- 8- Para cada m la funcional de energía de los sub-modos siguen un esquema de bifurcaciones como el mostrado en la Fig. 5, donde se observa que los sub-modos sucesivos

$n=1, 2, \dots$ prevalecen en el flujo a medida que ϑ decrece.

VI. REFERENCIAS

- 1 - B. Benjamin, J. Fluid Mech. **14**, 593 (1962).
- 2- R. González, L.G. Sarasúa and A. Costa. Phys. Fluids **20**, 24106, (2008).
- 3- R. González, A. Costa and E. S. Santini, Phys. Fluids **22** 074102 (2010).
- 4- D. G. Dritschel. J. Fluid Mech. **222**, 525 1991.
- 5- J.C. Nuñez, "Estudio analítico-Numérico de flujos cónicos rotantes". Tesis de licenciatura, dirigida por C Ferro Fontán, FCEYN, UBA, 1997.
- 6- R. González, "Estudio de la estabilidad de diferentes configuraciones de plasmas y fluidos". Tesis de doctorado, FCEYN, UBA, 1995.
- 7- R. González, R. Page, S. S. Sartarelli. Papers in Physics, vol. 4, art. 040002 (2012)