ISSN (EN LINEA): 1850 - 1158

# MEDICIONES CUÁNTICAS SIN COLAPSO DE LA FUNCIÓN DE ONDA

# QUANTUM MEASUREMENTS WITHOUT WAVE FUNCTION COLLAPSE

**Leonardo Vanni[(1)] y Roberto Laura[(2)*]**

[(1)] Instituto de Astronomía y Física del Espacio (CONICET – UBA). Casilla de Correos 67, Suc. 28, 1428 Buenos Aires, Argentina. *e-mail: lv@iafe.uba.ar*
[(2)] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (Universidad Nacional de Rosario). Instituto de Física Rosario (CONICET – UNR). Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina. *e-mail: laura@ifir.edu.ar*

Mostramos que incluyendo en la descripción cuántica tanto al sistema como a los aparatos y haciendo uso de las fórmulas de la probabilidad condicional, es posible definir un operador estadístico efectivo del sistema, que depende del resultado de una primera medición, y que caracteriza la distribución de probabilidad para toda medición posterior sobre el sistema. Este operador estadístico efectivo representa el estado del sistema posterior a la medición, y solo en casos muy especiales coincide con el que resulta del postulado del colapso.

Palabras clave: mecánica cuántica, problema de la medición, colapso, interpretación

We show that including both the system and the apparatus in the quantum description of the measurement process, and using the concept of conditional probabilities, it is possible to define an statistical operator depending on the result of a first measurement, which give the probability distribution for all possible consecutive measurements. This effective statistical operator, representing the state of the system after the first measurement, is not the same that would be obtained by using the postulate of collapse of the wave function

Keywords: quantum mechanics, measurement problem, interpretation, collapse

## I. INTRODUCCIÓN

En la interpretación de Copenhague hay una escala microscópica que es descripta por la teoría cuántica, y una escala macroscópica o de laboratorio que debe describirse con una teoría clásica.
En esta interpretación el postulado de colapso de la función de onda describe como es afectado el sistema por el proceso de medición. Para un estado del sistema representado por el vector $|\phi\rangle$, en el que se mide el valor $q$ del observable representado por el operador $Q$, se postula entonces que el vector de estado experimenta una transformación no unitaria en la que colapsa en el autovector de $Q$ con autovalor $q$

$$|\phi\rangle \xrightarrow{\text{medición del valor } q} |q\rangle, \qquad \hat{Q}\,|q\rangle = q\,|q\rangle$$

Es von Neumann [(1)] quien aborda el proceso de medición describiendo al sistema $S$ y al aparato $A$ desde la teoría cuántica. El estado del sistema total $SA$ se representa en el espacio de Hilbert $H_S \otimes H_A$ y evoluciona con la ecuación de Schrödinger. El caso más simple es el de la medición ideal, caracterizado por la transformación unitaria.

$$|\phi\rangle\,|a_0\rangle \longrightarrow \sum_q \langle q\,|\,\phi\rangle\,|q\rangle\,|a_q\rangle\,, \qquad (1)$$

donde $|a_0\rangle$ es el estado inicial del aparato, y los $|a_q\rangle$ son estados del aparato que se correlacionan con los estados $|q\rangle$ del sistema.

El segundo término involucra una combinación lineal de estados macroscópicamente distinguibles del aparato. Para quienes interpretan que esto representa un aparato con su cursor simultáneamente en distintas posiciones este resultado es problemático, y requerirán de algún mecanismo físico adicional que seleccione sólo uno de los sumandos [(2, 3)].
En este trabajo nosotros consideraremos al estado del sistema como una distribución de probabilidades, y al vector de estado como una herramienta matemática que permite calcularlas usando la regla de Born [(4, 5, 6)]. Desde esta perspectiva analizaremos el vector de estado que resulta de una descripción cuántica del proceso de medición.

## II. MEDICIONES IDEALES Y DEDUCCIÓN DEL COLAPSO.

La medición ideal del observable $Q$ es una interacción entre el sistema $S$ y el aparato $A$ que se representa con la transformación unitaria dada en la ecuación (1), en el espacio $H_S \otimes H_A$.
La medición ideal de otro observable $R$ requiere otro aparato $B$, y se representa con una transformación en el espacio $H_S \otimes H_B$:

$$|\phi\rangle\,|b_0\rangle \longrightarrow \sum_r \langle r\,|\,\phi\rangle\,|r\rangle\,|b_r\rangle\,, \qquad (2)$$

[*] Autor a quién debe dirigirse la correspondencia.

donde $|r\rangle$ es autovector de $\hat{R}$ con autovalor *r*, y $|b_0\rangle$, $|b_r\rangle$ son estados del aparato *B* antes y después de la medición.
Las mediciones consecutivas de los observables *Q* y *R* se representan con transformaciones consecutivas en el espacio de Hilbert del sistema *S* y los dos aparatos *A* y *B* ($H = H_S \otimes H_A \otimes H_B$):

$$|\Psi_{inicial}\rangle = |\phi\rangle |a_0\rangle |b_0\rangle = \sum_q \langle q|\phi\rangle |q\rangle |a_0\rangle |b_0\rangle$$
$$\to \sum_q \langle q|\phi\rangle |q\rangle |a_q\rangle |b_0\rangle = \sum_q \sum_r \langle q|\phi\rangle\langle r|q\rangle |r\rangle |a_q\rangle |b_0\rangle$$
$$\to \sum_q \sum_r \langle q|\phi\rangle\langle r|q\rangle |r\rangle |a_q\rangle |b_r\rangle = |\Psi_{final}\rangle.$$

Las proposiciones que involucran registros de los dos aparatos tienen la estructura de un reticulado distributivo y ortocomplementado [7], propios de la *lógica clásica*, ya que ambos aparatos se representan en espacios de Hilbert diferentes. Para estas proposiciones valen las expresiones de la teoría de probabilidades usual, y en particular las referidas a las probabilidades condicionales.
La probabilidad de que el segundo aparato mida el valor *r* de *R*, *condicionada* a que el primer aparato haya medido el valor *q* de *Q*, se puede obtener entonces en la siguiente forma:

$$\Pr(b_r \mid a_q) \equiv \frac{\Pr(b_r \wedge a_q)}{\Pr(a_q)}$$
$$= \frac{\langle\Psi_{final}|[\hat{I}_S \otimes |a_q\rangle\langle a_q| \otimes |b_r\rangle\langle b_r|]|\Psi_{final}\rangle}{\langle\Psi_{final}|[\hat{I}_S \otimes |a_q\rangle\langle a_q| \otimes \hat{I}_B]|\Psi_{final}\rangle} \qquad (3)$$
$$= \langle q|r\rangle\langle r|q\rangle = Tr[\hat{\rho}_q \hat{\Pi}_r],$$

donde $\hat{\Pi}_r \equiv |r\rangle\langle r|$ es el proyector asociado a la proposición *R=r*, y $\hat{\rho}_q \equiv |q\rangle\langle q|$ es un *operador estadístico efectivo*, que corresponde al estado puro $|q\rangle$.
Destaquemos que el primer término de la expresión anterior refiere al cálculo de probabilidades de valores en los aparatos A y *B*, que aquí han sido considerados como sistemas cuánticos, pero en el último término de la misma expresión esta probabilidad ha sido escrita sin involucrar vectores ni operadores de los espacios de Hilbert $H_A$ ó $H_B$.
Si se mantiene el primer aparato (el que mide *Q*), pero se cambia el segundo aparato por otro que mida un observable *R'*, se obtendrá $\Pr(b'_r \mid a_q) = Tr[\hat{\rho}_q \hat{\Pi}'_r]$, donde ahora $\hat{\Pi}'_r = |r'\rangle\langle r'|$ es el proyector sobre el autovector con autovalor *r'* del observable *R'*.
Es claro que el operador estadístico efectivo $\hat{\rho}_q = |q\rangle\langle q|$ caracteriza al estado del sistema después de la primer medición en que se obtuvo *q*, ya que puede ser usado para calcular las probabilidades de cualquier observable del sistema, con posterioridad a la detección del valor definido *q* del observable *Q*. El efecto de la primera medición sobre el sistema es entonces la transformación $|\phi\rangle \to |q\rangle$, idéntica a la que se obtendría con el postulado del colapso.

## III. MEDICIONES NO IDEALES.

En este caso el sistema es modificado por el proceso de medición, aún cuando comience estando en un autoestado del observable a medir.
Los procesos de medición sobre los autovectores $|q\rangle$ de $\hat{Q}$ y $|r\rangle$ de $\hat{R}$ se describen con las transformaciones unitarias:

$$|q\rangle |a_0\rangle \to |\mu_q\rangle |a_q\rangle, \quad |r\rangle |b_0\rangle \to |\nu_r\rangle |b_r\rangle,$$

donde $|\mu_q\rangle$ y $|\nu_r\rangle$ difieren de los correspondientes estados iniciales $|q\rangle$ y $|r\rangle$.
Las dos mediciones consecutivas se representan entonces con la transformación:

$$|\Psi_{inicial}\rangle = |\phi\rangle |a_0\rangle |b_0\rangle$$
$$\to \to \sum_q \sum_r \langle q|\phi\rangle\langle r|\mu_q\rangle |\nu_r\rangle |a_q\rangle |b_r\rangle = |\Psi_{final}\rangle,$$

y la probabilidad de que el segundo aparato mida el valor *r* de *R*, *condicionada* a que el primer aparato haya medido el valor *q* de *Q*, resulta ahora:

$$\Pr(b_r \mid a_q) \equiv \frac{\Pr(b_r \wedge a_q)}{\Pr(a_q)} =$$
$$= Tr[(|\mu_q\rangle\langle\mu_q|)(|r\rangle\langle r|)] = Tr[\hat{\rho}'_q \hat{\Pi}_r].$$

Vemos que en este caso el *operador estadístico efectivo* para calcular las probabilidades de cualquier observable del sistema, con posterioridad a la detección del valor definido *q* del observable *Q*, es $\hat{\rho}'_q = |\mu_q\rangle\langle\mu_q|$. El efecto de la primera medición sobre el sistema es entonces la transformación $|\phi\rangle \to |\mu_q\rangle$, que no coincide con el resultado del postulado de colapso.

## IV. MEDICIÓN GENERALIZADA.

El proceso más general de medición se presenta por definición [1] con una colección de *operadores de medición* $\{\hat{M}_m\}$ en el espacio de Hilbert $H_S$ del sistema, tales que $\sum_m \hat{M}_m^+ M_m = \hat{I}$. La probabilidad de obtener el resultado *m* es $p(m) = \langle\phi|\hat{M}_m^+ \hat{M}_m|\phi\rangle$, y el cambio en el sistema se representa con la transformación:

$$|\phi\rangle \longrightarrow \left(\sqrt{\langle\phi|\hat{M}_m^+ \hat{M}_m|\phi\rangle}\right)^{-1} \hat{M}_m |\phi\rangle.$$

Pueden *deducirse* las propiedades de una medición generalizada a partir de la interacción entre el sistema *S* y el aparato *A*, representada por una transformación unitaria $\hat{U}$ en $H = H_S \otimes H_A$. Designando con $|m\rangle$ al estado del aparato correspondientes al resultado *m*, *los operadores de medición quedan definidos por la expresión*:

$$|\Psi_{inicial}\rangle = |\phi\rangle\,|0\rangle \rightarrow$$
$$|\Psi_{final}\rangle = \hat{U}(|\phi\rangle\,|0\rangle) = \sum_m |m\rangle\langle m|\hat{U}(|\phi\rangle\,|0\rangle)$$
$$\equiv \sum_m (\hat{M}_m^+\,|\phi\rangle)\,|m\rangle).$$

La probabilidad de registrar *m se deduce* entonces de la fórmula de Born:

$$\Pr(m) = \langle\Psi_{final}\,|\,(\hat{I}_S \otimes |m\rangle\langle m|)\,|\,\Psi_{final}\rangle$$
$$= \langle\phi\,|\,\hat{M}_m^+\hat{M}_m\,|\phi\rangle$$

Si dos aparatos, con operadores de medición $\{\hat{M}_{m_A}\}$ y $\{N_{m_B}\}$, son usados en forma consecutiva, se obtiene:

$$|\Psi_{inicial}\rangle = |\phi\rangle\,|0_A\rangle\,|0_B\rangle$$
$$\longrightarrow \sum_{m_B}\sum_{m_A}(\hat{N}_{m_B}\hat{M}_{m_A}\,|\phi\rangle)\,|m_A\rangle\,|m_B\rangle = |\Psi_{final}\rangle$$

La probabilidad de que el aparato *B* mida $m_B$ condicionada a que el aparato *A* haya registrado $m_A$ resulta:

$$\Pr(m_B\,|\,m_A) = \frac{\Pr(m_B \wedge m_A)}{\Pr(m_A)} =$$
$$= \frac{\langle\Psi_{final}\,|\,(\hat{I}_S \otimes |m_A\rangle\langle m_A| \otimes |m_B\rangle\langle m_B|)\,|\,\Psi_{final}\rangle}{\langle\Psi_{final}\,|\,(\hat{I}_S \otimes |m_A\rangle\langle m_A| \otimes \hat{I}_B)\,|\,\Psi_{final}\rangle} =$$
$$= \langle\phi_{efectivo}\,|\,\hat{N}_{m_B}^+\hat{N}_{m_B}\,|\,\phi_{efectivo}\rangle,$$

donde el *estado puro efectivo* es

$$|\phi_{efectivo}\rangle = \left(\sqrt{\langle\phi\,|\,\hat{M}_{m_A}^+\hat{M}_{m_A}\,|\phi\rangle}\right)^{-1}\hat{M}_{m_A}\,|\phi\rangle\;.$$

Este estado efectivo es el que prepara la primera medición. Vemos aquí también que los operadores de medición, la probabilidad del resultado obtenido y la transformación del estado del sistema se deducen de la transformación unitaria para el sistema y el aparato

## V. CONCLUSIONES.

En este trabajo hemos considerado el vector de estado como un objeto matemático que sirve para calcular probabilidades con la regla de Born.
Sistema y aparatos de medición fueron descriptos desde la teoría cuántica, y el proceso de medición fue representado por un operador unitario que corresponde a la solución de la ecuación de Scrödinger.
De esta forma hemos logrado una descripción satisfactoria del proceso de medición, en la que no es necesario postular mecanismos físicos adicionales como el colapso.
Considerando dos mediciones consecutivas sobre el sistema, la distribución de probabilidades de los posibles resultados de la segunda medición , condicionales a un resultado determinado de la primera medición, puede calcularse con la fórmula usual de las probabilidades condicionales.
En todos los casos analizados ha sido posible deducir cual es el estado efectivo del sistema posterior a la primera medición. El resultado obtenido coincide con el del postulado de colapso solamente para las mediciones ideales, pero no así para las mediciones no ideales o para las generalizadas.
En definitiva hemos mostrado las limitaciones del postulado de colapso y la utilidad de considerar a los aparatos dentro del formalismo de la mecánica cuántica, para una mejor comprensión del proceso de medición

## Referencias


1 -J. von Neumann, *Mathematical foundations of quantum mechanics*, Princeton Univ. Press (1955)

2 - M. Schlosshauer, Rev. Mod. Phys. **76**, 1267-1305 (2004)

3 – W. Zurek Rev. Mod. Phys. **75**, 715 (2003)

4 - A. Peres, *Quantum theory: concepts and methods*, Kluwer, Dordrecht (1993)

5 - L. Ballentine, Quantum mechanics. A modern development. World Scientific, Singapore (1998)

6 – W. M. de Muynck, *Foundations of quantum mechanics, an empiricist approach*, Kluwer, Dordrecht (2002)

7 – D. W. Cohen, *An introduction to Hilbert space and quantum logic*. Springer-Verlag, New York (1989)

8 - M. A. Nielsen, I. L, Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press (2000).