¿ CUALES SON LAS FUENTES DE LOS CAMPOS ELECTRICO Y MAGNETICO ?

C.Grosse*

Instituto de Física, Universidad Nacional de Tucumán,
Avenida Independencia 1800, 4000 San Miguel de Tucumán.

De acuerdo con la interpretación usual, las fuentes de los campos electrostáticos (magnetostáticos) son las densidades de carga (densidades de corriente). Se muestra ante todo que ésta no es más que una de las posibles interpretaciones: las fuentes del campo pueden ser consideradas también como menos el gradiente de la densidad de carga (rotor de la densidad de corriente). Se prueba a continuación que en situaciones dependientes del tiempo, las expresiones de los campos retardados son consistentes con esta interpretación alternativa, mientras que son incompatibles con la interpretación usual.

INTRODUCCION

Estamos acostumbrados a la noción que los campos electrostáticos son producidos por cargas puntuales:

$$\mathbf{E}\ (\mathbf{r}) = \frac{1}{4\ \pi\ \varepsilon_0} \sum_i \frac{e_i\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}_i\ |^3} \qquad (1)$$

En formulación de continuo, las cargas individuales son reemplazadas por una densidad de carga ρ, lo que lleva a la expresión usual para el campo:

$$\mathbf{E}\ (\mathbf{r}) = \frac{1}{4\ \pi\ \varepsilon_0} \int \frac{\rho\ (\mathbf{r}')\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |^3}\ dV' \qquad (2)$$

Como cada elemento de volumen del espacio en el que ρ es diferente de cero contribuye al valor del campo, concluímos que la densidad de carga es la fuente del campo electrostático.

Sin embargo, la ecuación 2 puede ser transformada, como se muestra en el Apéndice 1, a una forma muy diferente:

$$\mathbf{E}\ (\mathbf{r}) = \frac{1}{4\ \pi\ \varepsilon_0} \int \frac{-\ \mathrm{grad}'\ \rho\ (\mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |^3}\ dV' \qquad (3)$$

La transformación es puramente matemática, de forma que los campos calculados con las ec 2 y 3 son idénticos para toda distribución de carga.

Sin embargo, la fuente del campo electrostático en la ec 3 aparece ahora como el gradiente de la densidad de carga cambiado de signo: - grad ρ en vez de ρ.

¿Es este un resultado matemático sin significado físico? Parecería que no. Expresa que una densidad de carga uniforme no puede producir campo alguno, simplemente porque no puede especificar ninguna dirección para el mismo. Para poder determinar una dirección es imprescindible que la densidad de carga varíe de un punto a otro, o que exista una frontera.

La ecuación 2 ha sido escrita como extensión de la expresión para el campo de una carga puntual. La densidad de carga correspondiente puede ser caracterizada ya sea por su valor:

$$\rho\ (\mathbf{r}') = e\ \delta\ (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_e) \qquad (4)$$

o por su gradiente:

$$\mathbf{grad}'\ \rho\ (\mathbf{r}') = -\ e\ \delta'\ (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_e)\ \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}_e}{|\ \mathbf{r}' - \mathbf{r}_e\ |} \qquad (5)$$

La ecuación 2 está escrita en términos de la primera, mientras que la 3 está basada en la segunda. Se ve de inmediato que la ec 2 combinada con la 4 es idéntica a la 3 combinada con la 5.

Una situación análoga se presenta con el campo magnetostático correspondiente a una densidad de corriente $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{B}\ (\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\ \pi} \int \frac{\mathbf{J}\ (\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |^3}\ dV' \qquad (6)$$

* Investigador del CONICET

De acuerdo con esta expresión, la fuente del campo magnetostático es la densidad de corriente. Sin embargo, la ec. 6 puede ser transformada, como se muestra en el Apéndice 2, a la forma:

$$\mathbf{B}\ (\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathrm{rot}'\ \mathbf{J}\ (\mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |^3}\ dV' \tag{7}$$

La fuente del campo magnetostático aparece como el rotor de la densidad de corriente, y no la densidad de corriente misma.

Este resultado expresa que una densidad de corriente uniforme no puede producir campo magnetostático, ya que sólo especifica los planos que deben contener las líneas de campo, pero no determina dirección alguna para esta líneas. Tal especificación requiere la existencia de una frontera o de otra variación espacial de la densidad de corriente.

En la sección siguiente se va a mostrar que las interpretaciones alternativas presentadas no sólo son equivalentes a las usuales, sino que parecen ser preferibles a las mismas.

CAMPOS RETARDADOS

Mientras se consideren solamente problemas estáticos, no parece existir fundamento alguno para preferir las ecuaciones 2,6 sobre las 3,7 o viceversa. Para mostrar una ventaja eventual de una interpretación sobre la otra, es necesario analizar situaciones dependientes del tiempo.

Consideremos por ejemplo el campo de una esfera uniformemente cargada. De acuerdo con la ec.2, dicho campo se calcula mediante una integral sobre todo el volumen de la esfera. Por el contrario, de acuerdo con la ec 3, solamente la superficie de la esfera contribuye al valor del campo. Si la esfera comienza a moverse, o a deformarse, el campo también comenzará a cambiar. Dicho cambio ocurrirá en un tiempo posterior determinado por la velocidad de la luz y por la distancia entre cada elemento de la fuente del campo y el punto de obsevación. Como las distancias a los elementos de volumen son diferentes que a los elementos de superficie, la evolución temporal del campo debería determinar si sus fuentes son la densidad de carga o menos el gradiente de dicha densidad.

Consideraremos primero el problema magnético, porque resulta ser más simple que el eléctrico. Las ecuaciones de Maxwell junto con la condición de Lorentz:

$$\mathrm{div}\ \mathbf{A} = -\mu_0\ \varepsilon_0\ \frac{\partial\ U}{\partial\ t} \tag{8}$$

llevan a la ecuación general para el potencial vectorial:

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\ \varepsilon_0\ \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial\ t^2} = -\mu_0\ \mathbf{J} \tag{9}$$

Su solución es el bien conocido potencial retardado:

$$\mathrm{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\ (\mathbf{r}',\ \tau)}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |}\ dV' \tag{10}$$

en la que:

$$\tau = t - |\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ | \ /\ c \tag{11}$$

Esta expresión muestra claramente que la densidad de corriente puede ser considerada como fuente del potencial vectorial magnético: el valor de este potencial se obtiene mediante una integral en la que **J** es evaluado en cada elemento de volumen a un tiempo anterior determinado por la distancia de dicho elemento al punto de observación.

El campo magnético puede ser calculado como el rotor del potencial vectorial. El resultado, deducido en el Apéndice 3, es:

$$\mathbf{B}\ (\mathbf{r},\ t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\ (\mathbf{r}',\tau) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |^3}\ dV' - $$
$$ - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \partial\ \mathbf{J}\ (\mathbf{r}',\ \tau)/\partial\ t}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |^3}\ dV' \tag{12}$$

Si esta expresión no tuviera más que el primer sumando, su interpretación sería inmediata: la fuente del campo magnético es la densidad de corriente, ya que en la integral **J** es evaluado en cada elemento de volumen a un tiempo anterior, determinado por la distancia del elemento al punto de observación. La presencia del segundo sumando hace que esta interpretación no sea aceptable.

En lugar de transformar la ec 12, tratando de expresar el integrando en términos de alguna función de la densidad de corriente que sea evaluada en el tiempo τ, vamos a volver a las ecuaciones de Maxwell. Tomando el rotor en ambos miembros de la ecuación de Ampére, y combinando el resultado con la ecuación de Faraday, se obtiene la expresión siguiente para el campo magnético:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = - \mu_0 \,\mathbf{rot\ J} \qquad (13)$$

En el caso estático, este resultado tiene la misma forma que la ecuación de Poisson, de forma que la ec 7 se deduce sin ningún cálculo suplementario. En situaciones dependientes del tiempo, la ec 13 tiene la misma forma que la expresión 9 para el potencial vectorial. En consecuencia, su solución debe tener también la misma forma:

$$\mathbf{B}\ (\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{rot}'\ \mathbf{J}\ (\mathbf{r}',\tau)}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |}\, dV' \qquad (14)$$

Contrariamente a la ec 12, esta expresión muestra claramente que la fuente del campo magnético puede ser interpretada como el rotor de la densidad de corriente: el valor del rotor de **J** se debe evaluar en cada elemento de volumen en un tiempo anterior.

Las expresiones para el campo eléctrico se obtienen en forma análoga. La ecuación general para el potencial escalar es:

$$\nabla^2 U - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = - \rho / \varepsilon_0 \qquad (15)$$

cuya solución es el potencial retardado:

$$\mathbf{B}\ (\mathbf{r},\ t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\ (\mathbf{r}',\tau)}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |}\, dV' \qquad (16)$$

Esta expresión muestra claramente que la densidad de carga puede ser considerada como fuente del potencial escalar.

El campo eléctrico se puede calcular ahora como menos el gradiente del potencial escalar menos la derivada respecto del tiempo del potencial vectorial. El resultado, deducido en el Apéndice 4, es:

$$\mathbf{E}\ (\mathbf{r},\ t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\ (\mathbf{r}',\tau)\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |^3}\, dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\partial\ \rho\ (\mathbf{r}',\ \tau)}{\partial\ t} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |^2}\, dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\partial\ \mathbf{J}\ (\mathbf{r}',\ \tau)}{\partial\ t} \frac{dV'}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |^2} \qquad (17)$$

Al igual que en el caso magnético, la presencia del segundo sumando hace que no sea posible interpretar a la densidad de carga como fuente del campo eléctrico. El tercer sumando muestra además que este campo depende también de la densidad de corriente, excepto en el caso estático.

Para determinar las fuentes del campo eléctrico, tomamos el rotor en ambos miembros de la ecuación de Faraday. Combinando el resultado con la ecuación de Ampére se obtiene la siguiente expresión para el campo eléctrico:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{grad}\ \rho / \varepsilon_0 + \mu_0 \frac{\partial\ \mathbf{J}}{\partial\ t} \qquad (18)$$

En el caso estático, este resultado tiene la misma forma que la ecuación de Poisson, de forma que la ec 3 se deduce sin ningún cálculo suplementario. En situaciones dependientes del tiempo, la ec 18 tiene la misma forma que la expresión 9 para el potencial vectorial. En consecuencia, su solución debe tener también la misma forma:

$$\mathbf{E}\ (\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int \frac{-\mathbf{grad}'\rho\ (\mathbf{r}',\ \tau) - \mu_0\varepsilon_0\ \partial\ \mathbf{J}\ (\mathbf{r}',\ \tau)/\partial\ t}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |}\, dV' \qquad (19)$$

Vemos así que las fuentes del campo electrostático pueden ser consideradas como menos el gradiente de la densidad de carga. En situaciones dependientes del tiempo, el campo eléctrico depende además de la derivada temporal de la densidad de corriente.

CONCLUSION

Se ha mostrado que la interpretación usual que la densidad de carga (densidad de corriente) es la fuente de los campos electrostáticos (magnetostáticos) no es consistente cuando se consideran situaciones dependientes del tiempo. Esta inconsistencia desaparece si se considera que las fuentes de estos campos son menos el gradiente de la densidad de carga y el rotor de la densidad de corriente, respectivamente.

Las ecuaciones 10 y 16 para los potenciales, junto con las 14 y 19 para los campos, forman un conjunto de cuatro expresiones que tienen todas exactamene la misma forma. Sólo cambian las fuentes:

ρ	para el potencial escalar,
$\mathbf{J}$	para el potencial vectorial,
$\mathbf{rot\ J}$	para el campo magnético,
$-\mathbf{grad}\ \rho - \mu_0\, \varepsilon_0\, \partial\, \mathbf{J} / \partial\, t$	para el campo eléctrico.

Esta uniformidad entre las cuatro expresiones no existe en la interpretación usual.

Otra propiedad de esta interpretación alternativa es que el potencial escalar tiene una fuente escalar, mientras que tanto el potencial vectorial como los dos campos tienen fuentes vectoriales. Esta correspondencia también se da en la interpretación usual, excepto para el campo eléctrico cuya fuente es escalar.

APENDICE I

La expresión del campo electrostático, ec 2, se puede tranformar de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}\ (\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{1}{4\ \pi\ \varepsilon_0} \int \frac{\rho\ (\mathbf{r}')\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |^3}\ dV'$$

$$= \frac{1}{4\ \pi\ \varepsilon_0} \int \rho\ (\mathbf{r}')\ \mathbf{grad}'\ \frac{1}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |}\ dV'$$

$$= \frac{1}{4\ \pi\ \varepsilon_0} \int \left[\frac{\mathbf{grad}'\ \rho\ (\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\mathbf{grad}'\ \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV'$$

La primera integral se extiende sobre la superficie

$$= \frac{1}{4\ \pi\ \varepsilon_0} \int \frac{\rho\ (\mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |}\ \mathbf{n}'\ dS'\ -$$

$$- \frac{1}{4\ \pi\ \varepsilon_0} \int \frac{\mathbf{grad}'\rho\ (\mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |}\ \mathbf{n}'\ dS'\ -$$

que encierra el volumen de integración. Como este volumen abarca todo el espacio, dicha integral se anula para todo sistema localizado de carga. Esto lleva a la ec 3.

APENDICE 2

La expresión para el campo magnetostático, eq 6, se puede transformar de la siguiente manera:
La segunda integral se extiende sobre la superficie

$$\mathbf{B}\ (\mathbf{r}) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\ \pi} \int \frac{\mathbf{J}\ (\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |^3}\ dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\ \pi} \int \mathbf{J}\ (\mathbf{r}') \times \mathbf{grad}' \frac{1}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |}\ dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\ \pi} \int \left[\frac{\mathbf{rot}'\ \mathbf{J}\ (\mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |} - \frac{\mathbf{rot}'\ \mathbf{J}\ (\mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |} \right] dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\ \pi} \int \frac{\mathbf{rot}'\ \mathbf{J}\ (\mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |}\ dV'\ +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\ \pi} \int \frac{\mathbf{J}\ (\mathbf{r}')}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |} \times \mathbf{n}'\ dS'$$

que encierra al volumen de integración. Como este volumen abarca todo el espacio, dicha integral se anula para todo el sistema localizado de corrientes. Esto lleva a la ec.7.

APENDICE 3

El campo magnético dependiente del tiempo puede ser obtenido calculando el rotor del potencial vectorial:

$$\mathbf{B}\ (\mathbf{r},\ t) = \frac{\mu_0}{4\ \pi}\ \mathbf{rot}' \int \frac{\mathbf{J}\ (\mathbf{r}',\ \tau)}{|\ \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ |}\ dV'$$

El operador rotacional actúa sobre las coordenadas no primadas que aparecen tanto en el denominador como en el numerador ya que:

$$\tau = t - | \mathbf{r} - \mathbf{r}' | / c$$

Debido a esta dependencia complicada, es conveniente hacer la siguiente transformación:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau) = \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', t')\, \delta(t' - \tau)\, dt'$$

de forma que el campo magnético resulta:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \mathbf{rot}\, \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')\, \delta(t' - \tau)}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |}\, dt'\, dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\delta(t' - \tau)}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |}\, \mathbf{rot}\, \mathbf{J}(\mathbf{r}', t')\, dt'\, dV' +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \mathbf{grad}\, \frac{\delta(t' - \tau)}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}', t')\, dt'\, dV'$$

La primera integral es igual a cero, ya que **J** es función de coordenadas primadas. Se tiene así:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \delta(t' - \tau)\, \mathbf{grad}\, \frac{1}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |} \times$$

$$\times \mathbf{J}(\mathbf{r}', t')\, dt'\, dV' +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{1}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |}\, \mathbf{grad}\, \delta(t' - \tau) \times$$

$$\times \mathbf{J}(\mathbf{r}', t')\, dt'\, dV'$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \delta(t' - \tau)\, \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |^3} \times$$

$$\times \mathbf{J}(\mathbf{r}', t')\, dt'\, dV' +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{1}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |}\, \frac{\delta(t' - \tau)}{c}\, \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |} \times$$

$$\times \mathbf{J}(\mathbf{r}', t')\, dt'\, dV'$$

La integración sobre la variable t'lleva al resultado final, ec 12.

APENDICE 4

El campo eléctrico dependiente del tiempo puede ser calculado como menos el gradiente del potencial escalar menos la derivada respecto del tiempo del potencial:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) =$$

$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \mathbf{grad} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau)}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |}\, dV' -$$

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |}\, dV' =$$

$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathbf{grad}\, \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau)}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |}\, dV' -$$

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |}\, dV' =$$

$$= - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |}\, \mathbf{grad}\, \rho(\mathbf{r}', \tau)\, dV' -$$

$$- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}', \tau)\, \mathbf{grad}\, \frac{1}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |}\, dV' -$$

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{\partial t}\, \frac{dV'}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |} =$$

$$= - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |}\, \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau}\, \mathbf{grad}\, \tau\, dV' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}', \tau)\, \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |^3}\, dV' -$$

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{\partial t}\, \frac{dV'}{| \mathbf{r} - \mathbf{r}' |}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau}{\partial \rho}\, \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{c\, |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}', \tau)\, \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}\, dV' -$$

$$- \frac{\mu_0}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau)}{\partial t}\, \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Que es el resultado final, ec 17.