

# CONSIDERACIONES SOBRE EL USO DE METODOS NUMERICOS DE INVERSION DE SEÑALES LUMINOSAS DE UN PLASMA PARA LA OBTENCION DE LA DENSIDAD ELECTRONICA

L.Bilbao <sup>b)</sup>, H.Bruzzone <sup>b)</sup>, D.Grondona <sup>a)</sup>

*Instituto de Física del Plasma (INFIP) CONICET-*

*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires,*

*Departamento de Física, Ciudad Universitaria, Pabellón. 1, 1428 Buenos Aires.*

En numerosas situaciones experimentales, las señales registradas requieren ser tratadas con un proceso de deconvolución para obtener la magnitud buscada. Ejemplo de esto es la obtención de la densidad de un plasma con ciertas simetrías a través de la inversión de la intensidad luminosa emitida [1]. En este trabajo se analizan algunas de las limitaciones genéricas del método descrito en la Ref. 1 (generación de oscilaciones numéricas, incertezas) con miras a clarificar la confiabilidad de los valores de la magnitud buscada obtenibles con este procedimiento y también establecer criterios de precisión en las medidas realizadas.

## METODO DE INVERSION

La ecuación para obtener la potencia luminosa (P) a partir de la señal medida (W) es [1]

$$W(r_0, z) = \int_0^{z \cos \varphi} P(x) f(z \cos \varphi - x) dx \quad (1)$$

donde

$$f(u) = \frac{(r_0 + u \operatorname{cosec} \varphi) \operatorname{cosec} \varphi}{\left[ (r_0 + u \operatorname{cosec} \varphi)^2 - r_0^2 \right]^{1/2}} \quad (2)$$

Conocida W en un conjunto de N valores de z el problema consiste en obtener P en los correspondientes valores de x. Asumiendo, por simplicidad, para z, intervalos equiespaciado  $\Delta z$ , se tiene

$$W_i \equiv W(r_0, i \Delta z) = \int_0^{i \Delta z \cos \varphi} P(x) f(i \Delta z \cos \varphi - x) dx \quad (3) \quad a)$$

$$1 \leq i \leq N$$

Una manera sencilla de inversión numérica de la ecuación anterior consiste en descomponer la integral de la siguiente manera <sup>b)</sup>

$$W_i = \quad (4)$$

$$= \sum_{j=1}^i \int_{(j-1) \Delta z \cos \varphi}^{j \Delta z \cos \varphi} P(x) f(i \Delta z \cos \varphi - x) dx$$

y asumir una cierta dependencia de P con x, en el intervalo  $\Delta x = [x_{j-1}, x_j]$ , siendo  $x_j = j \Delta z \cos \varphi$ , por ejemplo,

$$a) \quad P(x) = P_j \quad (5)$$

$$b) \quad P(x) = (P_j + P_{j-1}) / 2 \quad (6)$$

$$c) \quad P(x) = P_{j-1} + (P_j - P_{j-1})[(x - (j-1)\Delta x) / \Delta x] \quad (7)$$

Reemplazando en (4) las distintas dependencias de P con x, se obtiene

$$W_i = \sum_{j=1}^i P_j I_{i-j+1} \quad (8)$$

$$W_i = \sum_{j=1}^i \frac{1}{2} (P_j + P_{j-1}) I_{i-j+1} \quad (9)$$

a) Becaria CONICET

b) Investigador CONICET

c) con  $\alpha$  y  $k$  reales, siendo

$$W_i = \sum_{j=1}^i [ P_j J_{i-j+1} + P_{j-1} (I_{i-j+1} - J_{i-j+1}) ] \quad (10)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\Delta x}$$

por lo tanto

$$\delta P_j = \delta P_1 (-\alpha)^{j-1} \quad (17)$$

$$J_k = \int_{(k-1)\Delta x}^{k\Delta x} \frac{(k\Delta x - u)}{\Delta x} f(u) du \quad (11)$$

Si se perturban las expresiones para  $P$  (13-15) y se supone que  $\delta W_i = 0$ , reemplazando  $\delta P_j$  por (17) quedan las siguientes ecuaciones para  $\alpha$

$$-I_k = \int_{(k-1)\Delta x}^{k\Delta x} f(u) du \quad (12)$$

a)

Las expresiones (8-10) se invierten, quedando

$$-1 = \sum_{j=1}^{i-1} (-\alpha)^{j-1} \left[ \frac{I_{i-j+1}}{I_1} \right] \quad (18)$$

a)

$$P_i = \frac{1}{I_1} [ W_i - \sum_{j=1}^{i-1} P_j I_{i-j+1} ] \quad (13)$$

b)

$$-1 = \sum_{j=1}^{i-1} (-\alpha)^{j-1} \left[ \frac{I_{i-j+1} + I_{i-j}}{I_1} \right] \quad (19)$$

b)

$$P_i = \frac{2}{I_1} [ W_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} P_j (I_{i-j+1} + I_{i-j}) ] \quad (14)$$

c)

$$-1 = \sum_{j=1}^{i-1} (-\alpha)^{j-1} \left[ \frac{I_{i-j+1} + I_{i-j} - J_{i-j}}{I_1} \right] \quad (20)$$

c)

$$P_i = \frac{1}{J_1} [ W_i - \sum_{j=1}^{i-1} P_j (J_{i-j+1} + I_{i-j} - J_{i-j}) ] \quad (15)$$

En la Tabla I se dan los valores de  $\alpha$  para algunos valores de  $N$ , en los tres casos de inversión.

N	caso a	caso b	caso c
4	0.6216	1.2172	0.8305
8	0.7673	1.1232	0.8730
16	0.8648	1.0732	0.9183
24	0.9038	1.0547	0.9397
28	0.9159	1.0491	0.9467
30	0.9208	1.0467	0.9496

Tabla I:  $\alpha$  en función de  $N$ .

### ESTABILIDAD DE LA INVERSION

Resolviendo las ecuaciones anteriores (13-15) se observa que, superpuesta a la solución, hay una oscilación. Principalmente con longitud de onda ( $\lambda$ ) igual a  $2 \Delta x$  y particularmente en las regiones donde la dependencia de  $P$  con  $x$  asumida se aparta apreciablemente de la función  $P(x)$ . Para estudiar el comportamiento del método frente a estas oscilaciones se asume para la perturbación

$$\delta P_{j+1} = \delta P_j \alpha e^{iK\Delta x} \quad I = \sqrt{-1} \quad (16)$$

Se infiere que los casos a) y c) son estables, ( $\alpha \leq 1$ ), mientras que el caso b) es inestable. Además, en el caso b) se ve que una perturbación

puede crecer rápidamente en una primera etapa y después propagarse a todas las celdas restantes sin ser apreciablemente amplificada. Esto no ocurre en los otros dos casos, donde la perturbación es atenuada desde un principio.

### FILTRADO DE LA SOLUCION

Considerando que las perturbaciones con  $\lambda = 2\Delta x$  no representan un comportamiento físico, se pueden eliminar mediante el siguiente filtro explícito [2]

$$\bar{P}_i = P_i + S (P_{i-1} + P_{i+1} - 2 P_i) \quad (21)$$

Usando  $S = 0.25$ , en las Figs. 2 y 3 se muestran dos soluciones de prueba, con y sin filtro, en el caso inestable b).

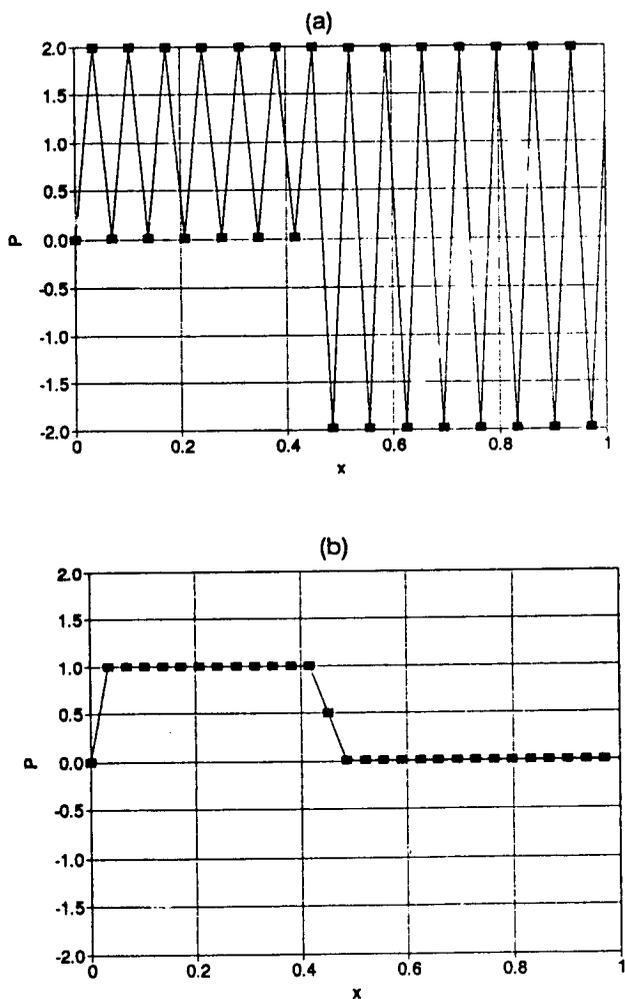


Figura 1: Efecto del filtrado en una solución de prueba (cuadrada). (a) sin filtro, (b) con filtro.

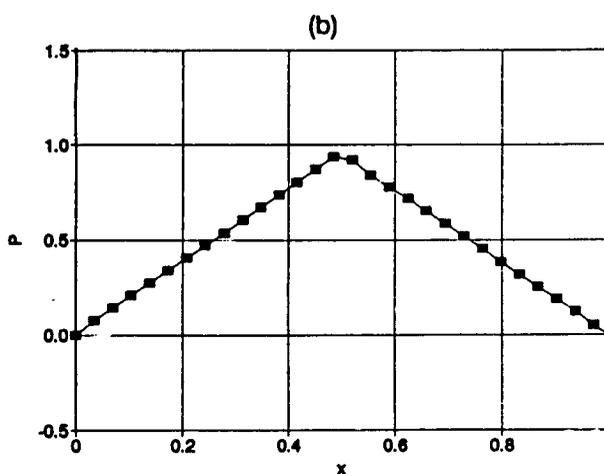
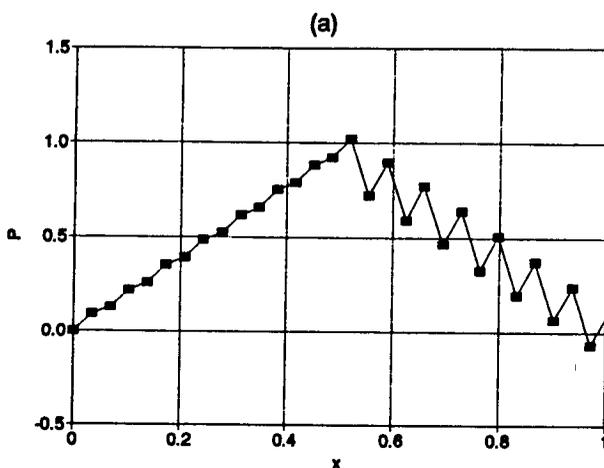


Figura 2: Efecto del filtrado en una solución de prueba (triangular). (a) sin filtro, (b) con filtro.

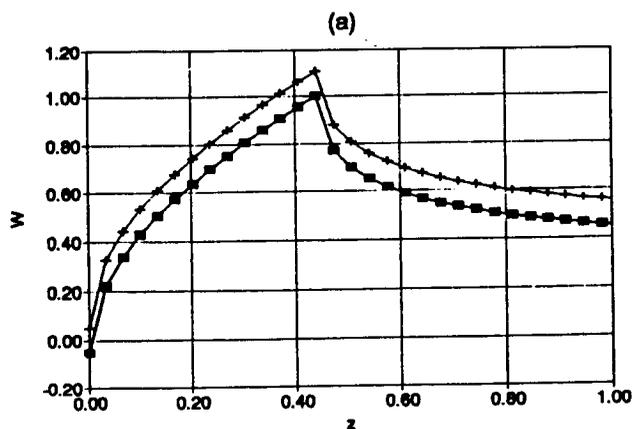


Figura 3a:

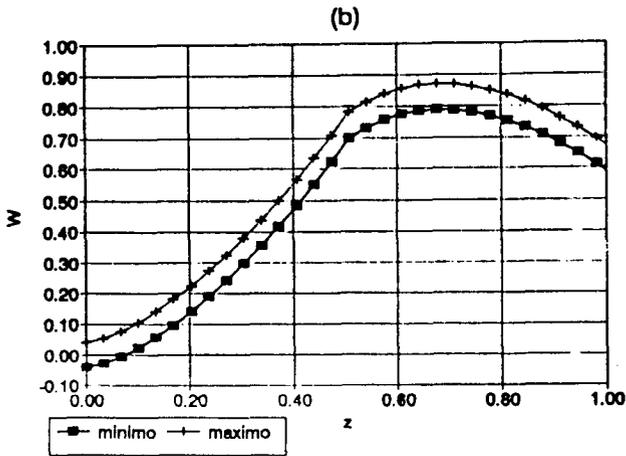


Figura 3: Cota superior e inferior de las funciones de prueba, cuya inversión de un perfil: (a) cuadrado, (b) triangular.

### PROPAGACION DE ERRORES

Los métodos descriptos requieren poco volumen de cálculo, y es posible evaluar cómo se propaga un error presente en los datos, invirtiendo muchas veces los datos de entrada a los cuales se les suma un error generado al azar entre cotas máximas y mínimas; adoptándose como error de la solución a la dispersión respecto del valor promedio de las distintas inversiones.

Este procedimiento es distinto de considerar el error de la solución como la diferencia entre las inversiones realizadas con las cotas de los datos de entrada; en particular, usando funciones de prueba cuadrada y triangular, se muestra esta diferencia en la Fig.4.

Nótese que dado un error de entrada constante ( $\Delta W$ ) se obtiene un error constante en la solución ( $\Delta P$ ), que verifica  $\Delta P/P_{\max} \approx \Delta W/W_{\max}$  donde  $P_{\max}$  y  $W_{\max}$  son los valores máximos de la solución y de los datos de entrada, respectivamente.

### CONCLUSIONES

La utilización de un método sencillo de inversión permite estudiar el comportamiento del mismo a perturbaciones, propagación de errores, filtrado.

Se observó que, a pesar del distinto comportamiento de los tres casos de inversión estudiados frente a la perturbación  $\lambda=2 \Delta x$ , luego del filtrado los resultados son equivalentes.

Finalmente, se encontró un criterio aproximado para la propagación de un error constante. Es decir, que el error de la solución (relativo al máximo) es igual al correspondiente valor en los datos

de entrada.

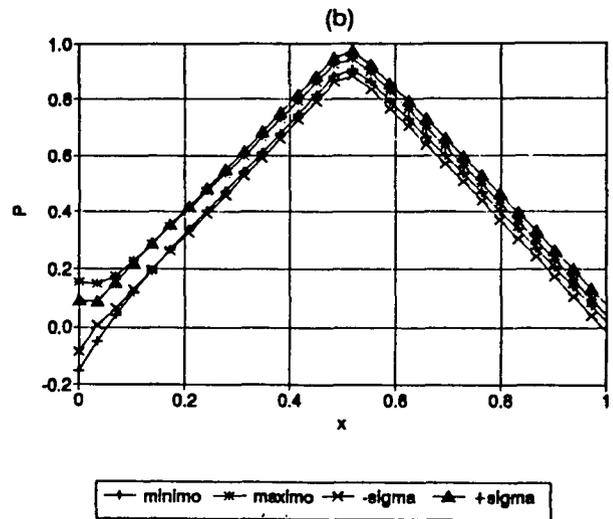
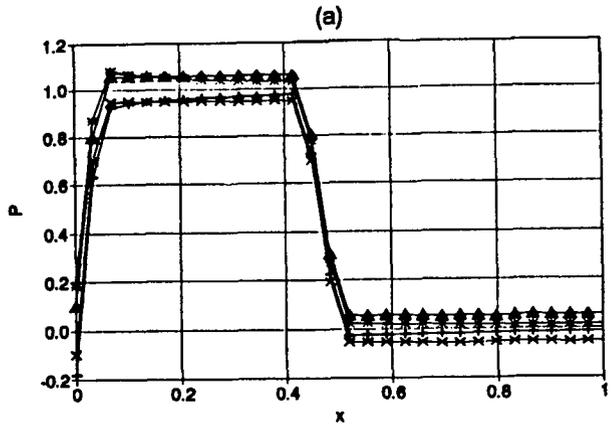


Figura 4: Propagación de un error constante en las funciones de prueba. (a) cuadrada, (b) triangular.

### REFERENCIAS

- 1] L.Bilbao, H.Bruzzone, H.Kelly; IEEE Transactions on Plasma Science 13 (1985), 202.
- 2] P.Alpert, Journal of Computational Physics 44 (1981), 212.