ISSN (EN LINEA): 1850 - 1158

# MEDICIONES CUÁNTICAS SIN DECOHERENCIA

# QUANTUM MEASUREMENTS WITHOUT DECOHERENCE

**Leonardo Vanni[(1)], Gabriel Martin[(2)] y Roberto Laura[*(3)]**

[(1)]Instituto de Astronomía y Física del Espacio (CONICET – UBA).
Casilla de Correos 67, Suc. 28, 1428 Buenos Aires, Argentina. *lv@iafe.uba.ar*
[(2)]Q-Logic S.A., Larrea 1007, 1117 Buenos Aires, Argentina. *gmartin@q-logic.com.ar*
[(3)]Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (Universidad Nacional de Rosario). Instituto de Física Rosario (CONICET – UNR). Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina. *laura@ifir.edu.ar*

Si el proceso de medición es representado como una interacción entre dos sistemas cuánticos, el objeto y el aparato, se obtiene una correlación entre los estados de ambos sistemas. Un cambio de base en los espacios de Hilbert del objeto y del aparato permite en algunos casos obtener una correlación diferente. Para algunos autores esto implicaría la posibilidad de medir simultáneamente observables que no conmutan, lo que haría necesaria la presencia de un environment que, vía decoherencia, seleccionara la base adecuada (pointer basis). Mostramos en este trabajo que si bien el cambio de base y la nueva correlación entre estados del objeto y estados del aparato es matemáticamente posible, esto no se corresponde con una medición realizable en el laboratorio. Resulta entonces innecesario apelar a la decoherencia producida por el medio ambiente para decidir cual es el observable que efectivamente “mide” el aparato.

Palabras clave:mecánica cuántica, medición, decoherencia, problema de la medición, interpretación

If the measurement process is represented by an interaction of two quantum systems, object and apparatus, a correlation is established for states of both systems. A change of basis on the Hilbert spaces of both systems allows in some cases to obtain a different correlation. The influence of an environmet to select the suitable basis is sometimes postulated as the mechanism to select the pointer basis and therefore the observable being mesasured. We show that even if different basis and correlations are possible from the mathematical point of view, not all these correlations correspond to measurement which are possible in a laboratory. Therefore it is unnecessary to invoque decoherence produced by the environment to decide which is the observable measured by the apparatus.

Keywords: quantum mechanics, measurement, decoherence, measurement problem, interpretation

## I. INTRODUCCIÓN.

En la teoría cuántica de la medición, desarrollada inicialmente por von Neuman, este proceso es descripto como una interacción entre dos sistemas, un sistema objeto $S$, y un sistema aparato $M$, los que son considerados cuánticos.
Supongamos que se quiere medir la variable $Q$ del sistema $S$, cuyos autoestados $|q\rangle$ forman una base del espacio de Hilbert $H_S$ donde se representan los estados de $S$. Se tiene para esto un aparato $M$ con el correspondiente observable indicador $A$ (cursor), cuyos autoestados $|a_i\rangle$ forman una base del espacio de Hilbert $H_M$, en el que se representan los estados de $M$. El estado del sistema compuesto $S+M$ se representa con un vector en el espacio de Hilbert $H = H_S \otimes H_M$.
La medición está caracterizada por un operador unitario $U$, el que resulta de la solución de la ecuación de Schrodinger que rige la evolución del sistema compuesto $S+M$, cuando sistema y aparato interactúan entre si.
Después de la interacción, estos sistemas quedan correlacionados, de modo que valores del observable $Q$, se corresponden a valores del observable $A$. A través de la lectura de los valores del observable indicador $A$, se pone de manifiesto el correspondiente valor de la variable $Q$ en el sistema objeto que se esta midiendo. Por este motivo se requerirá, como condición que define al aparato, que los posibles resultados que este puede arrojar en una medición, sean distinguibles macroscópicamente[(1)].

## II. EL PROBLEMA DE LA BASE ELEGIDA.

Dentro del tipo de mediciones ideales consideremos al sistema $S$ preparado inicialmente en algún autoestado $|q_k\rangle$ de la variable $Q = \sum q_k |q_k\rangle\langle q_k|$, y al aparato $M$

[*] Autor a quién debe dirigirse la correspondencia.

en algún estado inicial $|a_0\rangle$ de la variable $A=\sum a_k\,|a_k\rangle\langle a_k|$, cuyo autovalor $a_0$ definimos como el cero del cursor. Entonces, como requisito de la calibración del proceso de medición, el operador $U$ que lo caracteriza deberá ser tal que:

$$|\varphi\rangle=|q_k\rangle|a_0\rangle\rightarrow|\psi\rangle=U|\varphi\rangle=|q_k\rangle|a_k\rangle \qquad (1)$$

Como consecuencia de la linealidad de la ecuación de Schrodinger, si el sistema es preparado inicialmente en un estado genérico $\sum c_k\,|q_k\rangle$, tenemos que:

$$|\varphi\rangle=\sum c_k|q_k\rangle|a_0\rangle\rightarrow|\psi\rangle=U|\varphi\rangle=\sum c_k|q_k\rangle|a_k\rangle \qquad (2)$$

La descomposición de $|\psi\rangle$ como suma de un único índice, de estados de dos sistemas, tal cual aparece en la ultima ecuación, se denomina *descomposición biortonormal*[2]**.** Se puede demostrar que si los coeficientes $c_i$ que intervienen no son todos distintos, dicha descomposición no es única, existiendo cambios de bases en ambos espacios $H_S$ y $H_M$:

$$\begin{aligned}|q_j\rangle&=\sum_k M_{jk}|p_k\rangle\\ |a_j\rangle&=\sum_k N_{jk}|b_k\rangle,\end{aligned} \qquad (3)$$

con las matrices $M$ y $N$ unitarias, de modo tal que:

$$|\psi\rangle=\sum c_k|q_k\rangle|a_k\rangle=\sum c'_k|p_k\rangle|b_k\rangle, \qquad (4)$$

siempre y cuando:

$$\sum M_{ij}N_{ik}c_i=\delta_{jk}c'_k \qquad (5)$$

El problema que presenta la falta de unicidad en el desarrollo biortonormal de la ecuación (4) se basa en la ambigüedad de la interpretación del estado final $|\psi\rangle$ en la ecuación (2). Puede ser interpretado como estableciendo una correlación entre la variable del sistema $Q$ y la del aparato $A$ lo cual caracteriza la medición de $Q$ por medio de $A$. Pero también puede ser interpretado como una correlación entre la variable del sistema $P$ y la del aparato $B$ de modo que podríamos entender que también ha sido medida la variable $P$ por medio de $B$, aún cuando pueda suceder que $Q$ no conmute con $P$. Este problema ha sido llamado el problema de la base elegida [3], y constituye uno de los llamados problemas de la medición.

## III. MACROSCOPICIDAD.

Debido a la condición de macroscopicidad [1], que debe satisfacer la construcción del aparato destinado a la medición de una determinada variable, se puede argüir, en principio, que solo una de las descomposiciones de la ecuación (4) tiene sentido físico. Esa descomposición privilegiada es la asociada a la medición de la variable para lo cual fue diseñado el aparato, y es la que se vincula a estados del aparato que son microscópicamente distinguibles.

Esto es claramente evidenciado en el ejemplo del experimento de Stern y Gerlach. Supongamos que en un sistema de spin $1/2$ se quiere medir el spin en la dirección $z$. Se construye entonces un aparato con un campo magnético no homogéneo en la dirección $z$.

Se hace incidir sobre esta región del espacio a las partículas a las que se desea medir el spin, preparadas en un estado $|\varphi\rangle=(c_1|+\rangle+c_2|-\rangle)|\Phi_0\rangle$, donde $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son autoestados de spin según $z$ con valores positivos y negativos respectivamente, y $|\Phi_0\rangle$ representa una función de onda que avanza en la dirección del eje $y$ de coordenadas.

La interacción con el campo magnético vertical resulta en la siguiente transformación del estado cuántico que describe las variables de spin y de posición:

$$\begin{aligned}&|\varphi\rangle=(c_1|+\rangle+c_2|-\rangle)|\Phi_0\rangle\rightarrow\\ &\rightarrow|\psi\rangle=c_1|+\rangle|\Phi_+\rangle+c_2|-\rangle|\Phi_-\rangle\end{aligned}, \qquad (6)$$

La descomposición de $|\psi\rangle$ en la ecuación (6) establece una *correlación* entre los autoestados del spin según el eje $z$ ($S_z=\frac{1}{2}|+\rangle\langle+|-\frac{1}{2}|-\rangle\langle-|$) y los estados $|\Phi_+\rangle$ y $|\Phi_-\rangle$ que corresponden a funciones de onda centradas “arriba” y “abajo” en el eje $z$.

Si el sistema se prepara en un estado inicial de spin con $c_1=c_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$, el estado final $|\psi\rangle$ de la ecuación (6) se puede escribir en dos formas distintas:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle&=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|\Phi_+\rangle+|-\rangle|\Phi_-\rangle\right)=\\ &=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\bullet\rangle|\Phi_\bullet\rangle+|\otimes\rangle|\Phi_\otimes\rangle\right)\end{aligned} \qquad (7)$$

donde

$$|\bullet\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle+|-\rangle),\quad |\otimes\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle-|-\rangle) \qquad (8)$$

$$|\Phi_\bullet\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_+\rangle+|\Phi_-\rangle),\quad |\Phi_\otimes\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_+\rangle-|\Phi_-\rangle)\ . \qquad (9)$$

La segunda descomposición de $|\psi\rangle$ en la ecuación (7) establece una correlación entre los autoestados del spin según $x$ ($S_x=\frac{1}{2}|\bullet\rangle\langle\bullet|-\frac{1}{2}|\otimes\rangle\langle\otimes|$) y los estados $|\Phi_\bullet\rangle$ y $|\Phi_\otimes\rangle$.

La identidad en la ecuación (7) no significa que se ha medido $S_z$ y $S_x$ simultáneamente. Como el aparato de Stern y Gerlach fue diseñado para medir la variable $S_z$ implementando un campo magnético en la dirección $z$, la medición es efectiva si evaluamos como posibles resultados aquellos asociados a la variable del aparato correlacionada con $S_z$, y no con $S_x$. Por la misma construcción del aparato de Stern y Gerlach, son $|\Phi_+\rangle$ y $|\Phi_-\rangle$ los estados reconocibles y distinguibles macroscópicamente (producirán una mancha arriba o una mancha abajo en una pantalla colocada después del campo magnético). De este modo, la única descomposición con sentido físico del estado final es

$$|\psi\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|\Phi_+\rangle + |-\rangle|\Phi_-\rangle\right)$$

Los estados $|\Phi_\bullet\rangle$ y $|\Phi_\otimes\rangle$, si bien matemáticamente correctos para dar otro desarrollo del estado final, no tienen sentido como asociados a resultados de la medición en $x$. Estos no representan “mancha derecha” y “mancha izquierda” como verdaderamente deberían ser los resultado de la medición del spin en $x$. Estos estados sólo son representativos de la posibilidad de obtener la mitad de veces “mancha arriba” y la otra mitad “mancha abajo” en la medición del spin en $z$. El haz que llega al imán solo puede ser deflectado hacia arriba o hacia abajo del eje $z$ y nunca hacia izquierda o derecha. Así, el aparato de Stern y Gerlach en $z$ solo puede medir $S_z$.

Para medir $S_x$ se necesitará rotar el campo magnético en la dirección $x$. Estados con spin positivo ó negativo según $x$ estarán entonces correlacionados con estados de posición que corresponden a “mancha a la derecha” ó “mancha a la izquierda”, respectivamente.

El experimento de Stern y Gerlach, si bien es muy ilustrativo, es solo un caso particular. La necesidad de cambiar algo en el aparato (rotar el campo magnético) para cambiar las posibles salidas de "arriba-abajo" a "derecha-izquierda", permite establecer la distinción de lo que se esta midiendo en cada caso, y así privilegiar que correlación tiene sentido físico. Por la necesidad misma de deflectar el haz macroscópicamente, el aparato de Stern y Gerlach privilegia las salidas que participan en solo una de las posibles descomposiciones biortonor-males. Pero existen otros tipos de mediciones donde las distintas correlaciones posibles quedan en pie de igualdad, como es el caso de un sistema de spin $1/2$ que mide otro sistema de spin $1/2$. En este caso, algunos autores[4,5] han apelado a la influencia de un tercer sistema (environment), que mediante el proceso de decoherencia funcione como determinante en la preferencia de una base (pointer basis), y así permita reconocer lo que realmente se esta midiendo.

**IV. SOLUCION GENERAL.**

En vez de buscar una diferenciación de la base elegida apelando a una interacción con el environment “después” de la correlación sistema-aparato, una estrategia diferente resulta buscar una diferenciación “antes” de dicha correlación.

Supongamos que el estado final $|\psi\rangle = \sum c_k |q_k\rangle |a_k\rangle$ representa una medición de $Q$. Entonces, como consecuencia de la ecuación (1), que determina la calibración del aparato de medición, este estado tendrá que provenir de la transformación unitaria

$$|\varphi\rangle = \sum c_k |q_k\rangle|a_0\rangle \rightarrow |\psi\rangle = U|\varphi\rangle = \sum c_k |q_k\rangle|a_k\rangle \qquad (9)$$

Pero si el mismo estado final, ahora expresado como $|\psi\rangle = \sum c'_k |p_k\rangle |b_k\rangle$, representa el resultado de una medición de $P$, este deberá provenir de la transformación unitaria de otro estado $|\varphi'\rangle$:

$$\begin{aligned} &|\varphi'\rangle = \sum c'_k |p_k\rangle|b_0\rangle \rightarrow \\ &\qquad \rightarrow |\psi\rangle = U'|\varphi'\rangle = \sum c'_k |p_k\rangle|b_k\rangle \end{aligned} \qquad (10)$$

Se puede demostrar que si la relación entre los estados que aparecen en (9) y (10), esta dada por las ecuaciones (3) de cambio de base, resulta $|\varphi'\rangle \neq |\varphi\rangle$, por lo que necesariamente debe ser $U' \neq U$.

Así, si bien después de la medición el estado final presenta correlaciones que involucran a las variables $Q$ y $P$ (debido al cambio de base), dichas correlaciones no pueden obtenerse por medio de un mismo proceso a partir de distintos estados iniciales ($|\varphi\rangle$ y $|\varphi'\rangle$). Para esto se necesita cambiar el operador $U$ que caracteriza la medición. De este modo, un mismo proceso de medición no puede producir salidas que establecen correlaciones para un observable $Q$ y para otro $P$. Necesariamente tiene que privilegiar un juego de salidas vinculadas a una determinada correlación, y no otra. De este modo, podemos distinguir que se esta midiendo, al rastrear el proceso mediante el cual cada correlación fue obtenida.

**V. CONCLUSIONES.**

Aunque después de la medición no se puede hacer distinción entre los estados posteriores a la medición $\sum c_k |q_k\rangle |a_k\rangle$ y $\sum c'_k |p_k\rangle |b_k\rangle$, sí se puede hacer distinciones para los estados anteriores a la medición. La distinción es hecha al considerar que si se quiere medir distintos observables, aunque los dos estados finales sean iguales, estos deben provenir de estados iniciales distintos, vía distintos operadores unitarios. Esta distinción determina que aparato es usado, y por lo tanto que se esta midiendo.

Así, si bien el problema de la base elegida es planteado a raíz de la ambigüedad del estado obtenido después de la medición, el problema se resuelve al determinar el aparato de medición antes de la efectuar la misma.

La medición, por lo tanto, no queda determinada por la mera correlación para los estados de uno u otro observable, sino por la elección especifica del aparato que producirá tal correlación.

Resulta entonces innecesario apelar a la decoherencia producida por el medio ambiente para decidir cual es el observable que efectivamente “mide” el aparato.

## REFERENCIAS


1 – L. E. Ballentine, *Quantum mechanics. A modern development*. World Scientific, Singapore (1998).

2 – E. Schmidt, Math. Ann. **63**, pp 433-76. (1907).

3 – M. Schlosshauer, Rev. Mod. Phys. **76,** 1267 (2004).

4 – W. H. Zurek. Phys. Rev. D **24,** 1516 (1981).

5 – W. H. Zurek. Rev. Mod. Phys. **75,** 715 (2003).