INTEGRALES DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS DINAMICOS TRIDIMENSIONALES NO -HAMILTONIANOS

H.J. Giacomini, C.E. Repetto y O.P. Zandron
Instituto de Física Rosario, Universidad Nacional de Rosario y CONICET
27 de Febrero 210 Bis, 2000 Rosario.

En este trabajo se analiza el problema de encontrar integrales de movimiento para sistemas dinámicos tridimensionales. Se introduce un nuevo método directo en la búsqueda de los valores de los parámetros para los cuales existe una integral de movimiento. Este método consiste en proponer un *"ansatz"* para la integral que muestre explícitamente la dependencia con respecto a una de las coordenadas del espacio de fases del sistema. Se aplica este procedimiento al *"reduced 3-wave interaction problem"* y al *"Rabinovich system"*. Para ambos modelos se encuentran nuevas integrales de movimiento.

INTRODUCCION

En este trabajo se emplea un *"ansatz"* de carácter muy general para la integral de movimiento de sistemas dinámicos. Se propone un polinomio en una de las coordenadas del espacio de fases del sistema, cuyos coeficientes son funciones arbitrarias desconocidas de las otras coordenadas. Estas funciones deben satisfacer un conjunto "sobredeterminado" de ecuaciones en derivadas parciales, las cuales son compatibles solamente para valores particulares de los parámetros del sistema.

Se emplea este método para estudiar el *"Reduced 3-wave interaction problem"*, el *"Rabinobich system"* y el *"Lorenz model "*. Para el *"3-wave problem"* y el *"Rabinobich system"* se recobran sistemáticamente todas las integrales de movimiento conocidas y se encuentran otras nuevas. En el caso del modelo de Lorenz se recobran todos los resultados conocidos obtenidos por otros métodos pero no se pueden encontrar nuevos casos para los cuales exista una integral de movimiento.

DESARROLLO

"Reduced 3-wave interaction problem".

En primer término se considera el sistema dinámico en tres dimensiones *"reduced 3 -wave"*. En este sistema, tres ondas cuasi-sincrónicas interactúan en un plasma con no-linealidades cuadráticas. La evolución de este sistema dinámico está determinada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma x + \delta y + z - 2y^2 \\ \dot{y} &= \gamma y - \delta x + 2xy \\ \dot{z} &= -2z - 2zx \end{aligned} \qquad (2.1)$$

donde x, y, z son proporcionales a las amplitudes de las tres ondas respectivamente, δ mide el detonante del sincronismo, y los otros términos lineales describen efectos de disipación y el bombeo de energía externa [1].

Se encuentran nuevas integrales de movimiento para los siguientes casos:

a) $\gamma = 0$, δ arbitrario, con el invariante

$$I = z\,(y - \delta/2)\,e^{2t} \qquad (2.2)$$

b) $\gamma = -1$, δ arbitrario, con el invariante

$$I = (x^2 + y^2 + z)\,e^{2t} \qquad (2.3)$$

En el caso especial de $\delta = 0$, se obtiene una segunda integral para el caso b):

$$I = zy\,e^{3t} \qquad (2.4)$$

Cuando el sistema admite integrales de movimiento como en los casos a) y b) , no se observa en general comportamiento caótico. Los invariantes encontrados resultan lineales en z. Por la naturaleza del método empleado, podemos asegurar que no existen otras integrales lineales en z.

La forma general de una constante de movimiento lineal en z y con una dependencia exponencial en el tiempo es:

$$I = (a_1(x,y) + a_2(x,y)\,z)\,e^{\alpha t} \qquad (2.5)$$

donde a_1 y a_2 son funciones arbitrarias de x e y, y α es un parámetro arbitrario.
Con la condición dI/dt = 0 se obtiene:

$$a_{2x}\, z^2 + [(\,\gamma x + \delta y - 2y^2\,)\, a_{2x} + a_{1x} + (\,\gamma y + \delta x - 2xy\,)\, a_{2x} + (\,\alpha - 2\,(1+x)\,)\, a_2]\, z + (\,\gamma x + \delta y - 2y^2\,)\, a_{1x} + (\,\gamma y - \delta x + 2xy\,)\, a_{1y} + \alpha\, a_1 = 0 \tag{2.6}$$

Puesto que deben anularse los coeficientes del polinomio en z:

$$a_{2x} = 0 \tag{2.7}$$

$$(\,\gamma x + \delta y - 2y^2\,)\, a_{2x} + a_{1x} + (\,\gamma y - \delta x + 2xy\,)\, a_{2y} + (\,\alpha - 2\,(1+x)\, a_2\,) = 0 \tag{2.8}$$

$$(\,\gamma x + \delta y - 2y^2\,)\, a_{1x} + (\,\gamma y - \delta x + 2xy\,) + a_{1y} + \alpha\, a_1 = 0 \tag{2.9}$$

De (2.7) tenemos que $a_2 = a_2(y)$, con lo cual resultan dos ecuaciones en derivadas parciales para la función $a_1(x,y)$. La función a_2 y los parámetros α, δ y γ deben ser elegidos de manera tal que estas dos ecuaciones sean compatibles.

De reemplazar las ecuaciones (2.7) y (2.8) en (2.9), obtenemos:

$$a_{1y} = - [\alpha\, a_1 + (2 + 2x - \alpha)(\gamma x + \delta y - 2y^2)\, a_2] \,/\, (\gamma y - \delta x + 2xy) + (\gamma x + \delta y - 2y^2)\, a_{2y} \tag{2.10}$$

Se impone la condición $a_{1xy} = a_{1yx}$, de donde puede deducirse la expresión explícita para a_1:

$$a_1 = (1/\alpha(2y-\delta))\, \{[(2\alpha + 2\alpha x - \alpha^2)\,.\,(\alpha y - \delta x + 2xy) - 4\,(\gamma - 2 + \alpha)\, y^3 - 2\delta\,(-2\alpha + 4 - \gamma)\, y^2 + (2-\alpha)(\delta^2 + \gamma^2)\, y - 2\delta y x^2 + 4\gamma x^2 y + 4\gamma^2 x y]\, a_2 + 2\,(\gamma y - \delta x + 2xy)^2\,(1 - \gamma - \delta)\, a_{2y} - (\gamma y - \delta x + 2xy)^3\, a_{2yy}\} \tag{2.11}$$

donde se asume que $\alpha \neq 0$.

El caso $\alpha = 0$ no lleva a ningún resultado nuevo.

De la ecuación (2.11) se pueden obtener a_{1x} y a_{1y} las cuales juntamente con a_1 se reemplazan en (2.9). Teniendo en cuenta que a_2 es sólo función de y, para que la ecuación resultante se satisfaga para valores arbitrarios de x, se deben imponer las siguientes condiciones:

$$a_{2yy} = 0 \tag{2.12}$$

$$[4\gamma\delta + 2\alpha\delta - (8\gamma + 4\alpha)\, y]\, a_2 + (2y-\delta)^2\,(3\alpha + 4\gamma - 4)\, a_{2y} = 0 \tag{2.13}$$

$$2\gamma\,(2\gamma + \alpha)\, a_2 + \gamma\,(2y-\delta)\,.\,[-3\alpha + 4\,(1-\gamma)]\, a_{2y} = 0 \tag{2.14}$$

De (2.12) se tiene:

$$a_2(y) = C_1\, y + C_2 \tag{2.15}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

Después de reemplazar (2.15) en (2.13) y (2.14), se obtienen las siguientes ecuaciones algebraicas para α, δ, γ, C_1 y C_2:

$$C_1\,(\gamma + \alpha - 2) = 0 \tag{2.16a}$$

$$(5\alpha\delta + 6\delta\gamma - 8\delta)\, C_1 + 2\,(\alpha + 2\gamma)\, C_2 = 0 \tag{2.16b}$$

$$\gamma\ (\gamma\ - 2\ + \alpha)\ C_1\ = 0 \qquad (2.16c)$$

$$\delta\ [(3\alpha\delta\ + 4\delta\gamma\ - 4\delta)\ C_1\ + \\ + 2\ (\alpha\ + 2\gamma)\ C_2]\ = 0 \qquad (2.16d)$$

$$\gamma\ [(3\alpha\delta\ + 4\delta\gamma\ - 4\delta)\ C_1\ + \\ + 2\ (\alpha\ + 2\gamma)\ C_2]\ = 0 \qquad (2.16e)$$

Existen cuatro casos a considerar:
i) $C_1 = C_2 = 0$; no se obtienen constantes de movimiento.
ii) $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$; en este caso, tomando $\alpha = -2\gamma$ se satisfacen las ecuaciones (2.16). Luego (2.9) impone que $\gamma = -1$, para no obtener un resultado trivial. La constante de movimiento resultante está dada en (2.3) y fue hallada por Bountis et al. [2]
iii) $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$; si se toma $\alpha = 2 - \gamma$ y $C_2 = - \delta\ C_1/ 2$ se satisfacen las ecuaciones (2.16). Luego (2.9) requiere que $\gamma = 0$ o $\delta = 0$. Para el caso $\gamma = 0$, la integral resultante es la expresión (2.2), encontrada por Bountis et al. Para $\delta = 0$, la constante de movimiento, con γ arbitrario, es:

$$I\ = yz\ e^{(2-\gamma)\ t} \qquad (2.17)$$

Este resultado no ha sido encontrado por Bountis et. al. siendo así un invariante nuevo.
iv) $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$; la única solución para las ecuaciones (2.16) es $\gamma = -2$, $\alpha = 4$ y la ecuación (2.9) es satisfecha idénticamente. La constante de movimiento resultante es:

$$I\ = (y^2\ + x^2\ + 2yz\ /\ \delta)\ e^{4t} \qquad (2.18)$$

con δ arbitrario, lo que constituye un nuevo resultado.

'Rabinovich system"

El *"Rabinovich system"* es un modelo de interacción de tres ondas cuya evolución dinámica está determinada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}\ &= hy\ - \upsilon_1 x\ + yz \\ \dot{y}\ &= hx\ - \upsilon_2 y\ + xz \\ \dot{z}\ &= \upsilon_3 z\ + xy \end{aligned} \qquad (3.1)$$

donde υ_1, υ_2, υ_3 son las velocidades de amortiguamiento y h es proporcional a la amplitud que guia la onda de alimentación [1].
Este modelo fue estudiado por Bountis et. al. por medio del método de Painlevé, dando los siguientes invariantes:

$$I\ = (x^2\ + y^2\ - 4hz)\ e^{2\upsilon t} \qquad (3.2)$$

con las condiciones $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon > 0$, $\upsilon_3 = 2\upsilon$;

$$I\ = (x^2\ - y^2\ - 2z^2)\ e^{2\upsilon t} \qquad (3.3)$$

con las condiciones $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3 = \upsilon > 0$, y

$$I\ = (x^2\ + y^2)\ e^{2\upsilon t} \qquad (3.4)$$

con $h = 0$, $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon > 0$
Puesto que estas tres integrales son lineales en x^2, se propone el siguiente *"ansatz"* para encontrar nuevos invariantes:

$$I\ = (a_1(y,z)\ + a_2(y,z)\ x^2)\ e^{\alpha t} \qquad (3.5)$$

donde α es un parámetro arbitrario.
Utilizando el método explicado en el párrafo 2 y después de algunos cálculos, se reobtienen los resultados (3.2), (3.3) y (3.4) y se encuentran las siguientes constantes nuevas para este sistema:

$$I\ = y^2\ + (h\ - z)^2 \qquad (3.6)$$

con $\upsilon_2 = \upsilon_3 = 0$, h y υ_1 arbitrarios;

$$I\ = x^2\ + (z\ + h)^2 \qquad (3.7)$$

con $_1 = \upsilon_3 = 0$, h y υ_2 arbitrarios;

$$I\ = (y^2\ + z^2)\ e^{2\upsilon_1 t} \qquad (3.8)$$

con $\upsilon_1 = \upsilon_3$, $h = 0$, υ_1 y υ_3 arbitrarios;

$$I\ = (x^2\ - z^2)\ e^{2\upsilon_1 t} \qquad (3.9)$$

con $\upsilon_1 = \upsilon_3$, $h = 0$, υ_2 y υ_3 arbitrarios.

'The Lorenz Model".

Las ecuaciones de Lorenz que aparecen en modelos simples de turbulencia hidrodinámica se pueden escribir:

$$\dot{x} = \sigma (y - x)$$
$$\dot{y} = - y + \rho x - xz \qquad (4.1)$$
$$\dot{z} = - bz + xy$$

Distintos autores han estudiado el problema de buscar valores particulares de los parámetros σ, ρ, b para los cuales existe una integral de movimiento [2]. Todos los invariantes hallados son polinomios de grado ≤ 4 en las variables x, y, z. En particular con respecto a z son polinomios de grado ≤ 2. Tomando esto en cuenta se considera el siguiente *"ansatz"* para el invariante I:

$$I = (a_1(x,y) + a_2(x,y)\, z + a_3(x,y)\, z^2)\, e^{\alpha t} \qquad (4.2)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones (4.1) por el método empleado en las secciones 2 y 3 , reproduciéndose todos los resultados conocidos, pero no se encuentran nuevas integrales. En consecuencia puede asegurarse que el modelo de Lorenz no tiene otras cosntantes de movimiento polinómicas de grado ≤ 2 en la variable z.

CONCLUSIONES

Se ha empleado en este trabajo un método directo en la búsqueda de constantes de movimiento de sistemas dinámicos tridimensionales. El método consiste en proponer un *"ansatz"* para el invariante el cual es un polinomio de un dado grado en una de las coordenadas del espacio de fase del sistema. Los coeficientes de dicho polinomio son funciones arbitrarias de las demás coordenadas del espacio de fases.

Estas funciones deben satisfacer un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. Se ha mostrado en los ejemplos tratados que dicho sistema puede ser resuelto, pero la complejidad de los cálculos aumenta considerablemente con el grado del polinomio propuesto en el *"ansatz"*. En nuestro conocimiento, este tipo de *"ansatz"* no ha sido empleado con anterioridad para sistemas disipativos.

El método aquí empleado ha probado ser muy eficaz en la búsqueda de constantes de movimiento para sistemas dinámicos tridimensionales. Se han encontrado nuevas integrales para el *"Reduced 3-wave interaction problem"* y *"The Rabinovich system"*.

Para las ecuaciones de Lorenz no se han podido encontrar nuevas constantes de movimiento pero se han reobtenido todas las conocidas. El método es entonces aplicable a sistemas dinámicos de más alta dimensionalidad y pensamos que representa un complemento a la aproximación usual basada sobre el método de la simetría de Lie, la propiedad de Painlevé y el teorema de integrabilidad de Frobenius recientemente introducido por Strelcyn y Wojciechowski.

REFERENCIAS

[1] A.S. Pikovskii and M.I. Rabonovich, Math. Phys. Rev. vol 2,Sov. Sci. Rev. C, Harwood (1981)

[2] T.C. Bountis, A. Ramani, B. KGrammaticos y B.Dorizzi, Physica **128** A, 268, (1984)
M.D. Kruskal, A. Ramani y B. Grammaticos, *"Singularity anlysis and its relation to complete, partial and nonintegrability"*, Curso dado en la Houches Spring School (1989).