DERIVACION CUANTICA GENERALIZADA CON RESPECTO AL TIEMPO PROPIO II

**J.P. Aparicio, F.H. Gaioli*, E.T. García Alvarez*,
D.F. Hurtado de Mendoza y A.J. Kálnay****

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires, Pabellón I, Ciudad Universitaria,
1428 Buenos Aires.*

En este trabajo generalizamos la derivada cuántica de Beck con respecto al tiempo propio para el caso de una partícula de Dirac acoplada al campo electromagnético mediante una serie de términos propuesta por Foldy. Para el caso particular de la ecuación de onda que resulta de retener sólo los tres primeros términos de la serie, encontramos una formulación manifiestamente covariante de las ecuaciones de movimiento formalmente idénticas a las correspondientes ecuaciones clásicas. Para ello desarrollamos la correspondiente teoría clásica obteniendo las ecuaciones de movimiento para el impulso y el *spin*. Estas últimas resultan ser una generalización de las ecuaciones B.M.T..

1. INTRODUCCION

En mecánica Clásica Relativista el tiempo propio y la derivación con respecto a dicho parámetro invariante son conceptos bien determinados. No ocurre lo mismo en Mecánica Cuántica Relativista en donde existen diversas propuestas de derivación cuántica con respecto al tiempo propio no equivalentes.[1-4] La primera derivación de este tipo puede encontrarse en los trabajos clásicos de Fock,[1] Stueckelberg[5] y Nambu.[6] Para el caso de partículas de *spin* 1/2 fue empleada por Schwinger,[7] Feynman,[8] Enatsu[9] y mas recientemente en los trabajos de Horwitz, Piron y Reuse.[10-12] La misma también fue utilizada por Cooke,[13] Horwitz y Piron,[14] y por Collins y Fanchi[15,16] en el desarrollo de la Mecánica Cuántica Relativista de las partículas de *spin* 0.

Otra derivación con propiedades satisfactorias es la introducida originalmente por Beck[2] para el caso de la partícula de Dirac libre, luego, aplicada y extendida por Szamosi,[17] Bunge y Kálnay[18] y recientemente en un trabajo nuestro[19] para el caso de la partícula en interacción.

En las siguientes secciones generalizamos la derivada propuesta por Beck con la cual obtenemos ecuaciones de movimiento con analogía clásica.

La derivada de Fock y su vinculación con la derivada de Beck será tratada en la parte III de nuestra serie.[20] En IV daremos[21] una formulación axiomática de la Mecánica Cuántica Relativista de las partículas de spin 1/2 utilizando una representación tipo Schrödinger.[22]

2. DERIVACION CUANTICA CON RESPECTO AL TIEMPO PROPIO

Consideremos el caso general de una partícula masiva de spin 1/2 descripta por una ecuación del tipo ($\hbar$=c=1)

$$(\gamma^{\mu}p_{\mu} - R)\Psi = m\Psi, \tag{1}$$

donde R es un operador que:
i) garantiza la invariancia Lorentz y de *gauge* de la ec. (1),
ii)no contiene operadores diferenciales.

Es de particular interés el caso en que R tiene la forma

$$R = R_f \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\varepsilon_n \gamma_{\mu} \Box^n A_{\mu} + (i/2)\mu_n \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\Box^n (\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})\Big), \tag{2}$$

en donde ε_n y $\mu_n$son constantes que dan cuenta de propiedades intrínsecas de la partícula, $\Box$ es el operador d'Alambertiano y A_{μ} el potencial electromagnético.

La ecuación que resulta de reemplazar el opera-

* Becarios de la Universidad de Buenos Aires
**Nueva dirección: Laboratorio de Física Teórica, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), Apartado Postal 21827, Caracas 1020-A, Venezuela.

dor (2) en la ecuación (1) fue obtenida por Foldy[23] en un intento por proporcionar una caracterización de las propiedades electromagnéticas de las partículas masivas de *spin* 1/2. Si se considera sólo el término correspondiente a n = 0 obtenemos la ecuación empleada en I.

Definiremos la derivada con respecto al tiempo propio de una variable dinámica cualquiera Q como:

$$\frac{dQ}{ds} \equiv -i\,[\gamma^{\mu}p_{\mu} - R\ ,\ Q]\ . \qquad (3)$$

Esta generalización de la derivada de Beck es también invariante de Lorentz y de *gauge* y cumple con la regla de Leibniz. Además, si el espinor Ψ es solución de la ecuación (1), se puede demostrar que

$$\frac{dQ_{\Psi}}{ds} = \beta\frac{dQ_{\Psi}}{dt}\ . \qquad (4)$$

Esta identidad es la expresión cuántica de la relación clásica

$$\left.\frac{dQ}{ds}\right)_{cl} = (1 - v^2)^{-1/2}\left.\frac{dQ}{dt}\right)_{cl}\ ,$$

si identificamos, como es usual,24 a $(1-v^2)^{-1/2}|_{operador}$ con el operador β.

3. ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN EL TIEMPO PROPIO

Utilizando la derivada definida en (3), mostraremos en esta sección que es posible obtener una formulación manifiestamente covariante de las ecuaciones de movimiento cuánticas del impulso y del *spin*, formalmente idénticas a las correspondientes ecuaciones clásicas. Consideraremos el caso en que sólo se retienen los tres primeros términos de la serie (2), con lo cual

$$R = R_N \equiv e\gamma^{\mu}A_{\mu} + \frac{ke}{m^2}\gamma^{\mu}\Box A_{\mu} + \frac{\chi}{2}\mu_B\sigma^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon}\ , \qquad (5)$$

donde μ_B = e/2m es el magnetón de Bohr y k y χ son dos constantes adimensionales.

La ecuación que resulta de reemplazar en la ecuación (1) el operador definido en (5), ha sido utilizada para proporcionar una descripción fenomenológica de los nucleones,[25] y como mostramos en otro trabajo[26] permite obtener la parte relativista de las correcciones radiativas de la Q.E.D. a orden $(v/c)^5$.

Puesto que deseamos comparar ecuaciones clásicas y cuánticas, mostraremos primero cómo obtener las ecuaciones de movimiento para una partícula clásica correspondiente a la descripta por la ecuación cuántica obtenida empleando R_N.

ECUACIONES DE MOVIMIENTO CLASICAS

Consideraremos el caso en que las ecuaciones de movimiento pueden derivarse a partir de un principio variacional cuyo Lagrangiano es

$$\mathfrak{L} = \frac{m}{2}u^{\mu}u_{\mu} - \frac{m}{2} + eA_{\mu}u^{\mu} + k\frac{e}{m^2}(\Box A_{\mu})u^{\mu} + \frac{1}{4}\chi\mu_B\sigma^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}u^{\mu}u_{\mu} + \frac{1}{4}\chi\mu_B\sigma^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}.$$

Aquí $u^{\mu} \equiv dx^{\mu}/ds$, donde s es el tiempo propio, y k y χ son las constantes de acoplamiento. Si en el Lagrangiano (6) no imponemos, por ahora, la condición de vínculo u^2=1, de acuerdo con las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{d\pi^{\mu}}{ds} = \frac{d}{ds}(\tilde{m}u^{\mu}) = eF^{\mu\upsilon}u_{\upsilon} + (1/2)\ \chi\mu_B\sigma^{\alpha\beta}\partial^{\mu}F_{\alpha\beta}, \qquad (7)$$

en donde

$$p_{\mu} \equiv \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial u}\mu = \mu_{\mu} + eA_{\mu} + \frac{ke}{m^2}\Box A^{\mu} + (1/2)\ \chi\mu_B\sigma^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}u_{\mu}, \qquad \textbf{(8a)}$$

$$\pi^{\mu} \equiv p^{\mu} - eA^{\mu} - \frac{ke}{m^2}\Box A^{\mu}, \qquad \textbf{(8b)}$$

$$\tilde{m} \equiv m + \frac{\chi}{2}\mu_B\, \sigma^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \qquad \textbf{(8c)}$$

Se puede demostrar que las ecuaciones de movimiento así obtenidas son compatibles con el vínculo $u^2=1$.

En la ecuación (7), $\tilde{m}$ puede pensarse como una "masa efectiva" y, por lo tanto, la interacción del *spin* con el campo produce como efecto la modificación de la masa de la partícula.

Notemos, además, que del Lagrangiano (6) no es posible obtener las ecuaciones de precesión del *spin*, ya que el mismo no es una variable dinámica en dicho Lagrangiano. Sin embargo, siguiendo a Barut[27], puede considerarse un Lagrangiano que dependa de coordenadas internas asociadas al spin, a partir del cual se obtienen ecuaciones de movimiento tanto para dicha variable como para el impulso. Estas son:

$$\frac{d\pi^\mu}{ds} = eF^{\mu\upsilon}u_\upsilon + (1/2)\,\chi\mu_B\,\sigma^{\alpha\beta}\partial^\mu F_{\alpha\beta}, \qquad \textbf{(9a)}$$

$$(1/2)\,\frac{d\sigma^{\mu\upsilon}}{ds} = u^{[\upsilon}\pi^{\mu]} + \chi\mu_B\sigma^{[\mu\alpha}F^{\upsilon]}{}_\alpha. \qquad \textbf{(9b)}$$

La ec. (9a) es idéntica a la ec. (7). Además, puede probarse[27] que la segunda contiene como caso particular a las conocidas ecuaciones de Bargmannk-Miche-Telegdi.[28]

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Queremos obtener ahora las ecuaciones de movimiento cuánticas correspondientes a las ecuaciones (9). Definiendo al operador π^μ y al tensor de *spin* $S^{\mu\upsilon}$ como

$$\pi^\mu \equiv p^\mu - eA^\mu - \frac{ke}{m^2}\Box A^\mu, \qquad \textbf{(10a)}$$

$$S^{\mu\upsilon} \equiv \sigma^{\mu\upsilon}/2 = i\,[\gamma^\mu,\gamma^\upsilon]/2, \qquad \textbf{(10b)}$$

con $p^\mu \equiv i\,\partial^\mu$, y utilizando la derivada definida en (3) con $R = R_N$ después de un cálculo directo obtenemos:

$$\frac{d\pi^\mu}{ds} = eF^{\mu\upsilon}u^D_\upsilon + (1/2)\,\chi\mu_B\sigma^{\alpha\beta}\partial^\mu F_{\alpha\beta}, \qquad \textbf{(11a)}$$

$$\frac{ds^{\mu\upsilon}}{ds} = u_D^{[\upsilon}\pi^{\mu]} + \chi\mu_B\sigma^{[\mu\alpha}F^{\upsilon]}{}_\alpha, \qquad \textbf{(11b)}$$

en donde

$$u^\mu_D \equiv \frac{dx^\mu_D}{ds} = \gamma^\mu \qquad \textbf{(11c)}$$

es la velocidad asociada a x^μ_D .

Las ecuaciones (11a) y (11b) resultan formalmente idénticas a las ecuaciones clásicas (9a) y (9b) y con los mismos factores de proporcionalidad. En particular, (11b) es la expresión cuántica de una generalización de las ecuaciones B.M.T..

Si bien las ecuaciones para π^μ y $S^{\mu\upsilon}$ tienen una fuerte analogía formal con las ecuaciones clásicas, es conocido que de la derivada del operador posición habitual se obtiene una velocidad con propiedades no satisfactorias. En particular, la aceleración no conduce a una cuadrifuerza que pueda analogarse a la clásica. Estas anomalías constituyen , en parte, el Problema de la Localización[29] y serán tratados en el trabajo III de la serie.

4. COMENTARIOS SOBRE UNA POSIBLE CUANTIFICACION

Mostraremos ahora como se puede cuantificar la teoría presentada en la primera parte de la Sección 3. Para este fin conviene tener una formulación hamiltoniana de la teoría clásica.

Como es sabido, dado un Lagrangiano $\mathfrak{L}$ puede definirse un Hamiltoniano $\mathcal{H}$ como

$$\mathcal{H} = u^\mu p_\mu - \mathfrak{L}. \qquad \textbf{(12)}$$

Además, definiendo el corchete de Poisson de dos variables, R y Q, como

$$\{R,Q\} = \frac{\partial R}{\partial x^\mu}\frac{\partial Q}{\partial p_\mu} - \frac{\partial R}{\partial p^\mu}\frac{\partial Q}{\partial x_\mu}, \qquad \textbf{(13)}$$

tiempo propio de una variable Q = Q(x,p), que no depende explícitamente de s, como

$$\frac{dQ}{ds} = - \{\mathcal{H}, Q\} . \qquad (14)$$

Destaquemos finalmente que las variables canónicamente conjugadas x y p satisfacen:

$$\{ x_\mu , p^\upsilon\} = \delta^\upsilon_\mu, \qquad (15a)$$

$$\{x^\mu , x^\upsilon\} = \{p^\mu , p^\upsilon\} = 0. \qquad (15b)$$

Efectuando ahora la cuantificación de la teoría clásica con la regla de Dirac, de las relaciones (15) se obtienen las reglas de conmutación canónicas:

$$[x_\mu , p^\upsilon] = i\delta^\upsilon_\mu, \qquad (16a)$$

$$[x^\mu , x^\upsilon] = [p^\mu , p^\upsilon] = 0, \qquad (16b)$$

que definen las propiedades algebraicas de los operadores x^μ y p^μ.

Notemos que si desde un punto de vista puramente formal aplicamos dicha regla[30] a la expresión de la derivación clásica (14), tomando el Hamiltoniano clásico luego de aplicar la condición de vínculo $u^2=1$

$$\mathcal{H} = u^\mu p_\mu - eA_\mu u^\mu -$$

$$- \frac{ke}{m^2}\Box A_\mu u^\mu - (\chi/2)\,\mu_B\sigma^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon}$$

y en lugar de expresar a u_μ en función de p_μ, la reemplazamos por γ_μ de acuerdo con (11c), y reemplazamos al *spin* clásico por el operador definido en (10b), obtenemos la derivada definida en (3) con $R = R_N$. De esta forma se recuperan los resultados de las secciones 2 y 3. También, usando la condición de vínculo $u^2=1$, el Hamiltoniano resulta ser igual a m, lo cual es compatible con la ecuación (1) que satisface su correspondiente operador cuántico $(\gamma^\mu p_\mu - R)$.

REFERENCIAS

[1] V. Fock, Physik Z. Sowjetunion 12, 404 (1937).

[2] G. Beck, Rev. Facultad de Ciencias de Coimbra 10, 66 (1942).

[3] H. C. Corben, Phys. Rev. 41, 1833 (1961).

[4] D. M. Fradkin and R.H. Good, Rev. Mod. Phys. 33, 343 (1961).

[5] E.C.G. Stueckelberg, Helv. Phys. Acta 14, 322 (1941); 14, 23 (1942).

[6] Y. Nambu, Prog. Theor. Phys. 5, 82 (1954).

[7] J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 664 (1951).

[8] R. P. Feynman, Phys. Rev. 80, 440 (1950);R.P. Feynman, Phys. Rev. 81, 108 (1951). Véase también, S.S. Schweber, Rev. Mod. Phys. 58, 494 (1986).

[9] H. Enatsu, Prog. Theor. Phys. 30, 226 (1963); H. Enatsu, A. Takenaka, and M. Okazaki, Nuovo Cimento 43A, 575 (1978).

[10] L.P. Horwitz, C. Piron, and F. Reuse, Helv. Phys. Acta 48, 546 (1975).

[11] C. Piron and F. Reuse, Helv. Phys. Acta 51, 146 (1978).

[12] F. Reuse, Helv. Phys. Acta 51, 157 (1978).

[13] J.H. Cooke, Phys. Rekkv. 166, 1293 (1968).

[14] L.P. Horwitz and C. Piron, Helv. Phys. Acta 46, 316 (1973).

[15] R.E. Collins and J.R. Fanchi, Nuovo Cimento 48A, 314 (1978).

[16] J.R. Fanchi and R.E. Collins, Found. Phys. 8, 851 (1978); J.R. Fanchi, Found. Phys. 11, 493 (1981).

[17] G. Szamosi, Nuovo Cimento 20, 1090 (1961); 29, 677 (1963).

[18] M. Bunge and A.J. Kálnay, Prog. Theor. Phys.. 42, 1445 (1969).

[19] J.P. Aparicio et al., Anales AFA 2, 81 (1991), que de aquí en adelante denominaremos I.

[20] J.P. Aparicio, F.H. Gaioli, E.T. Garcia Alvarez, D.F. Hurtado de Mendoza y A.J. Kálnay, *Derivación Cuántica Generalizada con respecto al tiempo propio III*, enviado a Anales AFA, 1991.

[21] J.P. Aparicio, F.H. Gaioli, E.T. Garcia Alvarez, D.F. Hurtado de Mendoza y A.J. Kálnay, *Derivación Cuántica Generalizada con respecto al tiempo propio IV*, en preparación.

[22] En contraste, el formalismo que utilizamos en este trabajo corresponde a un cuadro tipo Heisenberg.

[23] L. Foldy, Phys. Rev. 87, 688 (1952).

[24] Véase, por ejemplo, W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, (Oxford, 1954) y J. Leite Lopez, *Introducción a la Electrodinámica Cúantica*, (TRILLAS, 1977).

[25] L. Foldy, Relv. Mod. Phys. 30, 471 (1958).

[26] *Correcciones radiativas de la Q. E. D. en el marco de la teoría de una partícula*, J.P. Aparicio, F.H. Gaioli, E.T. García Alvarez, D.F. Hurtado de Mendoza y A.J. Kálnay, enviado a Anales AFA, 1991.

[27] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, (Macmillan, 1964), cap.

[28] V. Bargmann, L. Michel, and V. Telegdi, Phys. Rev. Lett. 2, 435 (1959).

[29] A.J. Kálnay, *The Localization Problem*, contribución 7 en *Problems in the Foundations of Physics*, editado por M. Bunge, (Springer-Verlag, 1971) y las referencias allí citadas.

[30] Queremos señalar que la regla de Dirac, en general, presenta inconsistencias, véase, por ejemplo, E.T. Garcia Alvarez and A.D. González, Am.J. Phys. 59, 279 (1991).