DERIVACION CUANTICA GENERALIZADA CON RESPECTO AL TIEMPO PROPIO III

J.P. Aparicio, F.H. Gaioli*, E.T. García Alvarez*,
D.F. Hurtado de Mendoza y A.J. Kálnay**
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires.

En este trabajo utilizamos la generalización de la derivada cuántica de Beck que definimos en I y en II para obtener generalizaciones relativistas manifiestamente covariantes de los teoremas de Ehrenfest. Para ello introducimos un conjunto de variables que denominamos generalizadas y que presentan propiedades más satisfactorias que las variables usuales de la teoría de Dirac. Por ejemplo, el *spin* generalizado resulta ser una extensión del introducido previamente por Hilgevoord-Wouthuysen para el caso libre. Las ecuaciones de precesión del mismo presentan una marcada analogía con las ecuaciones clásicas de precesión de Thomas. Por último, establecemos una importante relación entre la derivada de Beck y la de Fock.

1. INTRODUCCION

Esta contribución es continuación de una serie de trabajos previos, [1,2] que de ahora en más llamaremos I y II, en los que discutimos la generalización de la derivada con respecto al tiempo propio introducida por Beck.[3]

En I y en II mostramos que las ecuaciones de movimiento para el impulso y el de Dirac tienen una marcada analogía con sus correspondientes ecuaciones clásicas. Sin embargo, el operador posición presenta, en otros aspectos, un comportamiento no deseable. Así, por ejemplo, la velocidad asociada tiene autovalores ± 1, resultado incompatible con el hecho que la partícula es masiva. Además, para la partícula libre ni el momento angular orbital asociado ni el *spin* se conservan por separado y la velocidad no es proporcional al impulso.

En este trabajo extendemos los resultados encontrados para el caso particular de acoplamiento mínimo por Bunge y por uno de nosotros, [4] mediante la introducción de un conjunto de variables, que aquí denominamos generalizadas, las cuales permiten evitar las dificultades mencionadas anteriormente.

Como recordamos en la introducción de II, existe una propuesta alternativa de derivación cuántica con respecto al tiempo propio introducida por Fock.[5]

Veremos que las ecuaciones de movimiento obtenidas con la misma también tienen analogía clásica y vincularemos tales ecuaciones con las obtenidas mediante el empleo de la derivada de Beck de las variables generalizadas.

2. VARIABLES GENERALIZADAS.

Introducimos a continuación el operador posición que motivó la inclusión de las variables generalizadas en nuestro trabajo (como veremos luego) y fue considerado por diversos autores,[4,6-8]

$$X^\mu \equiv x_D^\mu + \frac{i}{2m}\gamma^\mu \, . \qquad (1)$$

El mismo fue propuesto para subsanar las dificultades mencionadas en la introducción, las cuales constituyen parte del Problema de la Localización[9] que aún hoy día permanece abierto.[10]

El operador (1) permite obtener relaciones con sugestiva analogía clásica. En efecto, para el caso libre, la velocidad asociada con dicho operador[11] cuando es aplicada a soluciones de la ecuación de Dirac da

$$U^\mu \, \Psi \equiv \left(\frac{dX^\mu}{ds} \right) \Psi = \frac{p^\mu}{m} \Psi \qquad (2)$$

y además

$$U^\mu U_\mu \Psi = 1 \Psi \, , \qquad (3)$$

* Becarios de la Universidad de Buenos Aires
**Nueva dirección: Laboratorio de Física teórica, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), Apartado Postal 21827, Caracas 1020-A, Venezuela.

donde hemos utilizado la derivación definida en II con R=0.

En un trabajo previo se ha mostrado que,[4] para el caso de la ecuación de Dirac acoplada mínimamente al campo electromagnético, el uso conjunto de x_D^μ y X^μ permite obtener una formulación manifiestamente covariante de las ecuaciones de movimiento, que cumplen relaciones de tipo Ehrenfest. Veremos que esto se puede extender para el presente caso. Por ejemplo, la velocidad asociada a X^μ, sobre espinores Ψ, soluciones de la ecuación (II-1) con $R = R_N$, cumple que

$$U^\mu \Psi = \left(\frac{\pi^\mu}{m} - \frac{1}{2m} \chi \, \mu_B \left\{ \sigma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} . u_D^\mu \right\}_s \right) \Psi \, , \qquad (4)$$

donde hemos usado la definición $U^\mu \equiv dX^\mu/ds$ y la notación $\{A.B\}_S \equiv 1/2\,(AB+BA)$. La ecuación (4) es análoga a la ecuación clásica (II-8a), salvo que aparecen dos velocidades distintas.[12]

Además, la aceleración que obtenemos derivando U^μ es tal que la cuadrifuerza, $m\dot{U}^\mu$, satisface

$$\left(m \frac{dU^\mu}{ds} \right) \Psi = \left(\frac{d\pi^\mu}{ds} - \frac{1}{2m} \chi \mu_B \, . \right. \qquad (5)$$
$$\left. . \frac{d}{ds} \{ \sigma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \, . \, u_D^\mu \}_s \right) \Psi \, ,$$

ecuación que nuevamente tiene analogía clásica, como se desprende de comparar con la ecuación obtenida combinando la primera igualdad de (II-7) con la ecuación (II-8c). En cambio, la aceleración asociada a x_D^μ no conduce a expresiones con análogo clásico.

Notemos que, al igual que en la ref. 4, se puede escribir

$$X = x_D + \frac{i}{2m} \frac{dx_D}{ds},$$

$$U = u_D + \frac{i}{2m} \frac{du_D}{ds},$$

Definimos entonces un nuevo juego de variables que llamaremos generalizadas, que se obtienen de las ordinarias mediante la relación

$$Q_G = Q_D + \frac{i}{2m} \frac{dQ_D}{ds}, \qquad (6)$$

donde Q_D es una variable dinámica en la teoría de Dirac.

Para el caso libre el *spin* generalizado coincide con el de Hilgevoord-Wouthuysen[13]

$$\sigma_G^{\mu\upsilon} = \sigma^{\mu\upsilon} - \frac{i}{m} \gamma^{[\mu_p \, \upsilon]} \, . \qquad (7)$$

Utilizando la derivada de Beck definida en II para el caso $R = e\gamma^\mu A_\mu$, se puede demostrar que el *spin* generalizado satisface la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{d\sigma_G^{\mu\upsilon}}{ds} = u_G^{[\upsilon_x \mu]} \, . \qquad (8a)$$

Se aplicamos esta ecuación sobre soluciones Ψ de la ecuación (II-1) obtenemos

$$\frac{d\sigma_G^{\mu\upsilon}}{ds} = 2\mu_B \, \sigma_G^{[\mu\alpha_F \upsilon]}{}_\alpha \Psi \, . \qquad (8b)$$

La ecuación (8b) es formalmente idéntica a la ecuación de precesión clásica obtenida por Thomas.[14]

3. RELACION CON LA DERIVADA DE FOCK.

Como señalamos en la introducción de II, existen diversas propuestas no equivalentes de derivación cuántica con respecto al tiempo propio (para las variables dinámicas de la partícula descripta por la ec. de Dirac). De particular importancia es la introducida por Fock[5] y que fuera utilizada por Schwinger[15] para obtener una formulación manifiestamente covariante de la Q.E.D..

Consecuentemente con la ec. (II-1), definimos una generalización de la derivada de Fock como

$$\left. \frac{dQ}{ds} \right)_F \equiv - \frac{i}{2m} \left[(\gamma^\mu p_\mu - R)^2, Q \right] \, , \qquad (9)$$

donde hemos incluído un factor adicional 1/2m respecto de la definición usual (ver, por ejemplo, la ref. 15), el cual precisamente es el factor que hay que agregar para obtener ecuaciones con las dimensiones adecuadas y análogas a las clásicas.

Para el caso particular en que $R=e\gamma^\mu A_\mu$, empleando esta derivada obtenemos

$$\left.\frac{dx^\mu}{ds}\right)_F = \frac{\pi^\mu}{m}, \qquad \text{(10a)}$$

$$\left.\frac{d\pi^\mu}{ds}\right)_F = 2\mu_B \{F^{\mu\upsilon}.\pi_\upsilon\}_S + \frac{\mu_B}{2}\sigma_{\alpha\beta}\,\partial^\mu F^{\alpha\beta}, \qquad \text{(10b)}$$

$$\left.\frac{d\sigma^{\mu\upsilon}}{ds}\right)_F = 2\mu_B\sigma^{[\mu\alpha_F\upsilon]}{}_\alpha, \qquad \text{(10c)}$$

siendo esta última[16] nuevamente análoga a la ecuación de Thomas. Veremos que esta relación no es casual. En efecto, mostraremos ahora, como una nueva aplicación del formalismo desarrollado, una relación existente entre la derivada definida en (9) y la empleada en II.

Utilizando la notación

$$\hat{m} = \gamma^\mu p_\mu - R$$

y las definiciones (6), (II-3) y (9), después de algunos cálculos puede demostrarse que

$$_I\frac{dQ}{ds}{}_G = [\hat{m},Q_D] + \frac{\hat{m}}{2m}[\hat{m},Q_D] - \frac{1}{2m}[\hat{m},Q_D]\,\hat{m}, \qquad \text{(11)}$$

luego, si el espinor Ψ satisface la ecuación (II-1), es decir, en la nueva notación

$$\hat{m}\Psi = m\Psi, \qquad \text{(12)}$$

finalmente obtenemos la importante relación

$$\frac{dQ_G}{ds}\Psi = \frac{1}{2}\left([\hat{m},Q_D]\frac{\hat{m}}{m} + \frac{\hat{m}}{m}[\hat{m},Q_D]\right)\Psi = \left.\frac{dQ_D}{ds}\right)_F \Psi. \qquad \text{(13)}$$

Es decir, sobre las soluciones de la ecuación (12) la derivada de Beck (ecuación (II-3)) de las variables generalizadas es igual a la derivada de Fock (ecuación (9)) de las variables ordinarias. De esta última y de (10) se desprende como corolario el conjunto de ecuaciones (4), para χ=0, y (8b).

Podemos señalar por último que tanto las ecuaciones de movimiento que se obtienen mediante el empleo de la derivada de Beck como de la de Fock, encuentran ecuaciones análogas en la Mecánica Clásica. Sin embargo, la derivada de Beck no hace explícita la dependencia de las ecuaciones con el momento magnético normal μ_B de la partícula. La dependencia explícita con el *spin* se hace a través del momento magnético anómalo $\chi\mu_B$ cuando consideramos un acoplamiento $R = R_N$. En cambio, con la derivada de Fock tal dependencia se da con el momento magnético μ_B considerando $R = e\gamma^\mu A_\mu$. Por lo tanto, las ecuaciones (II-11) y (10) tienen el mismo aspecto pero con distintas contribuciones en los términos de *spin*. Este hecho se debe a que la derivada de Fock es la expresión de segundo orden de la derivada de Beck.[17]

Ahora bien, no debemos confundir lo dicho anteriormente con la relación encontrada entre ambas derivadas (ec. (13)), ya que ésta es válida para la misma elección de R en las dos derivaciones.

REFERENCIAS

1 J.P. Aparicio *et al.*, Anales AFA 2, 81 (1991).

2 J.P. Aparicio, F.H. Gaioli, E.T. García Alvarez, D.F. Hurtado de Mendoza y A.J. Kálnay, *Derivación Cuántica Generalizada con respecto al tiempo propio II*, enviado a Anales AFA, 1991.

3 G. Beck, Rev. Facultad de Ciencias de Coimbra 10, 66 (1942).

4 M. Bunge and A.J. Kálnay, Prog. Theor. Phys. 42, 1445 (1969).

5 V. Fock, Physyk Z. Sowjetunion 12, 404 (1937).

6 M. Bunge, Nuovo Cimento 1, 977 (1955).

7 G. Szamosi, Nuovo Cimento 20, 1090 (1961); 29, 677 (1963).

8 R.P. Feynman, *Quantum Electrodynamics* (Cal. Tech. Lectures, 1953), (Benjamin, 1961), lec. 9

9 A.J. Kálnay, *The Localization Problem*, contribución 7 en *Problems in the Foundations of Physics*, editado por M. Bunge, (Springer-Verlag, 1971) y las referencias allí citadas..

1 H. Bacry, *Localizability and Sapace in Quantum Physics*, (Springer-Verlag, 1988).

11 Giambiagi utilizó la velocidad asociada con el operador (1) para establecer una sugestiva relación entre las transformaciones de Lorentz y de

Foldy-Wouthuysen. Véase; J.J. Giambiagi, Nuovo Cimento 16, 202 (1960).

12 En la ref. 6, M. Bunge interpretó a $u_D\mu$ como la velocidad de la carga puntual que sufre un movimiento de temblor (Zitterbewegung) y a U^μ como la velocidad del centro de masa de una distribución de materia extendida en una región de longitud característica 1/m.

13 J. Hilgevoord and S.S. Wouthuysen, Nucl. Phys. 40, 1 (1963).

14 Compárese con la ecuación (4.124) de L.H. Thomas, Philos. Mag. 3, 1 (1927).

15 J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 664 (1951).

16 Algunos comentarios interesantes acerca de las ecuaciones de movimiento (10) pueden encontrarse en R.P. Feynman, Phys. Rev. 84, 108 (1951), Apéndice D.

17 Nótese que en la ecuación de segundo orden correspondiente a la ecuación de Dirac acoplada mínimamente al campo electromagnético también se hace explícita la dependencia con el momento magnético normal. Véase, por ejemplo, A. Messiah, *Mecánica Cuántica*, (Tecnos,-Madrid, 1975), cap.XX, sec. 20.