INTEGRALES FUNCIONALES, NUMEROS DE BETTI Y EXPONENTES DE LYAPUNOV EN LA MECANICA HAMILTONIANA

G.Mana y R.Montemayor*

Centro Atómico Bariloche, Comisión Nacional de Energía Atómica e Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, CC439, 8400 San Carlos de Bariloche.

Una característica interesante de la formulación con integrales funcionales de la dinámica hamiltoniana es la aparición de simetrías BRST y anti-BRST. Ellas dan lugar a clases de cohomología de Rham asociadas al subespacio de autoestados nulos del hamiltoniano extendido. En este trabajo mostramos cómo la dimensión de estas clases (los números de Betti) dan cotas para los exponentes de Lyapunov del sistema dinámico considerado.

Recientemente se ha replanteado la mecánica clásica hamiltoniana en términos de integrales funcionales [1-3]. El formalismo resultante satisface una simetría BRST que permite una conexión directa entre ciertas características topológicas y propiedades ergódicas de los sistemas clásicos. En lugar de especificar a la dinámica por medio de las ecuaciones de movimiento que corresponden a una cierta acción S, esta formulación se basa en la integral funcional[1]

$$Z = \int Dx \ \delta(x-x_c) \ , \tag{1}$$

donde $x_c(t)$ son las soluciones de las ecuaciones de movimiento

$$\dot{x}^a = \omega^{ab} \partial_b H \ , \quad a,b = 1,...,n \ (n \text{ par}) \ , \tag{2}$$

La distribución delta en la integral garantiza que sólo las soluciones clásicas contribuyen. Introduciendo coordenadas auxiliares bosónicas (b_a) y fermiónicas (c^ay $\bar{c}_a$) la integral Z puede expresarse en un espacio de configuración extendido $(x,b,c,\bar{c})$

$$Z = \int Dx \ Db \ Dc \ D\bar{c} \ \exp(iS_{ef}) \tag{3}$$

El lagrangiano que corresponde a la acción efectiva S_{ef} es

$$\begin{aligned} L &= b_a(\dot{x}^a - \omega^{ab} \partial_b H) + \\ &+ \dot{c}^a\bar{c}_a + \bar{c}_a\omega^{ab} \partial_b\partial_c H c^c \ , \end{aligned} \tag{4}$$

Es importante remarcar que las coordenadas fermiónicas c^a satisfacen las mismas ecuaciones de movimiento que los campos de Jacobi de las órbitas $x^a(t)$. Esta teoría satisface simetrías BRST y anti-BRST, con generadores

$$Q = c^a b_a \qquad \bar{Q} = \bar{c}_a \omega^{ab} b_b \ . \tag{5}$$

Los momentos canónicos están dados por las siguientes expresiones:

$$p_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} = b_a \ , \qquad \xi^a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{b}^a} = 0 \ ,$$

$$\bar{\pi}_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{c}^a} = \bar{c}_a \ , \qquad \pi_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{c}}_a} = 0 \ ,$$

que dan lugar a vínculos de segunda clase. Estos conducen al hamiltoniano de Dirac que define a la teoría canónica en el espacio extendido:

$$\mathcal{H} = p_a \ \omega^{ab} \ \partial_b H - \bar{\pi}_a \ \omega^{ab} \ \partial_b\partial_c H \ c^c \ . \tag{6}$$

A partir de este hamiltoniano se puede desarrollar una versión operatorial [2], en forma totalmente similar a una cuantización canónica, haciendo:

$$p_a \rightarrow -\frac{\partial}{\partial x^a} \qquad \bar{\pi}_a \rightarrow \frac{\partial}{\partial c^a} \ , \tag{7}$$

con lo cual el operador hamiltoniano resultante es:

$$\hat{\mathcal{H}} = \omega^{ab} \ (\partial_a H) \ \partial_b + c^b(\partial_b \ \omega^{ac} \ \partial_c H) \ \frac{\partial}{\partial c^a} \ . \tag{8}$$

* Investigador CONICET

Este es un operador de Liouville supersimétrico, y así esta cuantización genera una versión supersimétrica del formalismo de Liouville para la mecánica clásica. La "ecuación de Schrödinger" correspondiente es la ecuación de difusión para un sistema dinámico determinista.

Las coordenadas c^a se identifican con los campos de Jacobi δx^a [1,2]. Esta identificación nos permite asociarlas con los diferenciales [2]. Existe un difeomorfismo $\mathcal{F}$ entre el espacio de las órbitas clásicas M_n y el espacio fase N_{2n}. Los campos de Jacobi son elementos del espacio cotangente T^*M, isomórfico a T^*N por $\mathcal{F}$. Por lo tanto hay una relación uno-a-uno entre δx^a y dx^a, y de aquí entre c^a and dx^a. Por otra parte $\bar{c}_a$ transforma como $\partial/\partial c^a$, lo cual implica que corresponden al espacio tangente. Finalmente el tensor ω^{ab} define un isomorfismo entre el espacio tangente y el cotangente. Esta correspondencia permite identificar las cargas BRST (Q) y anti- BRST (Q) con la derivada y coderivada respectivamente del álgebra exterior de formas:

$$Q = c^a\partial_a \leftrightarrow d = d\phi^a \partial_a ,$$

$$\bar{Q} = \bar{c}_a \omega^{ab}\partial_b \leftrightarrow d^* = -(-1)^{n(p-1)} \star d \star , \tag{9}$$

donde $\star$ es el operador de Hodge. En este contexto el hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$ se identifica con claridad con la derivada de Lie con respecto al campo vectorial $f^a = \omega^{ab}\partial_b V$:

$$\mathcal{H} = l_f = f^a \partial_a + c^a f^b_{;a} \frac{\partial}{\partial c^b} , \tag{10}$$

y la evolución temporal de un estado caracterizado por

$$\rho^{(p)} = \rho^{(p)}_{a_1 \ldots a_p} c^{a_1} \ldots c^{a_p} \tag{11}$$

dada por el transporte de Lie con respecto al campo f:

$$\partial_t \rho^{(p)}_{a_1 \ldots a_p} = i\, l_f \rho^{(p)}_{a_1 \ldots a_p} = \mathcal{H} \partial_t \rho^{(p)}_{a_1 \ldots a_p} . \tag{12}$$

En este contexto las cargas supersimétricas pueden considerarse

$$Q_{SUSY} \leftrightarrow d_t = e^{-\beta H} d e^{\beta H}$$

$$\bar{Q}_{SUSY} \leftrightarrow d_t^* = e^{-\beta H} d^* e^{\beta H}$$

y de aquí resulta

$$H^t = tH_{BRST} = [d_t, d_t^*]_+ . \tag{13}$$

Existe una relación entre los autoestados de H_t con energía cero y las clases de cohomología de Rham[4]. En primer lugar consideremos los números de Betti de orden p, $B^{(p)}(M)$, que son la dimensión de las clases de cohomología de rango p. Los elementos de esta clase son p-formas armónicas, y por lo tanto $B^{(p)}(M)$ da una cota inferior para la dimensión del espacio de dichas p-formas.

Por otra parte, la Ec.(13) implica que los autovectores nulos de H_t son p-formas armónicas del operador laplaciano ∇_t:

$$\nabla_t \omega = (d_t d_t^* + d_t^* d_t) \omega = 0 \tag{14}$$

pero las clases de cohomología de d_t son p-formas armónicas, y por lo tanto son también autovectores nulos de H_t.

Los números de Betti del álgebra exterior d_t son constantes de movimiento, por lo que podemos identificarlas con los números de Betti de la variedad, $B^{(p)}(M)$. Las p-formas armónicas de d_t están definidas por:

$$\lambda_p(t) = \{ \lambda_p \ni \Lambda^p / H_t \lambda_p(t) = 0 \} , \tag{15}$$

y así tenemos finalmente:

$$\dim(\lambda_p(t)) \geq B^{(p)}(M) . \tag{16}$$

Pero $\hat{\mathcal{H}}$ es un operador supersimétrico y por lo tanto su estado base tiene autovalor no-negativo

$$\mathcal{H}|\rho^p_{min}> = \rho^p_{min}|\rho^p_{min}> , \quad \rho^p_{min} \geq 0 . \tag{17}$$

Entonces, de acuerdo a la Ec.(16) tenemos:

$$B^{(p)}(M) = 0 \Rightarrow \rho^{p}_{min} \geq 0 \ ,$$

$$B^{(p)}(M) > 0 \Rightarrow \rho^{p}_{min} = 0 \ .$$

Existe otro desarrollo formal que se conecta con lo anterior. En la formulación supersimétrica de una dinámica estocástica los autovalores inferiores del operador de difusión en los diferentes sectores de Grassman están estrechamente relacionados a los exponentes de Lyapunov. Más precisamente, para n variables tenemos $n + 1$ sectores con número fermiónico $0,1,..., n$ y n exponentes de Lyapunov de orden uno [5]:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n \ . \quad \textbf{(18)}$$

La suma de los p mayores exponentes de Lyapunov es el exponente de Lyapunov generalizado de orden p, que describe el crecimiento exponencial medio del volumen p-dimensional en el espacio tangente[6]. Es el opuesto al autovalor inferior $\rho^{(p)}$ del operador de difusión $\hat{\mathcal{H}}$ restringido al subespacio de las p-formas [7]:

$$\sigma^{(p)} = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i = - \rho^{p}_{min} \ . \qquad \textbf{(19)}$$

Esta ecuación se puede usar para calcular los exponentes de Lyapunov de primer orden en términos de los autovalores $\rho^{(p)}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= - \rho^{1}_{min} \ , \\ \sigma_p &= \rho^{p-1}_{min} - \rho^{p}_{min} \qquad \forall p > 1 \ . \end{aligned} \qquad \textbf{(20)}$$

Finalmente, si consideramos las restricciones sobre los autovalores mínimos de $\hat{\mathcal{H}}$ dadas por los números de Betti, obtenemos los siguientes rangos para los exponentes de Lyapunov:

$$B^{(p)}(M) \geq 1 \wedge B^{(p-1)}(M) \geq 1 \Rightarrow \sigma_p = 0 \ ,$$

$$B^{(p)}(M) \geq 1 \wedge B^{(p-1)}(M) = 0 \Rightarrow \sigma_p \geq 0 \ ,$$

$$B^{(p)}(M) = 0 \wedge B^{(p-1)}(M) \geq 1 \Rightarrow \sigma_p \leq 0 \ ,$$

$$B^{(p)}(M) = 0 \wedge B^{(p-1)}(M) = 0 \text{ no hay cotas} \ .$$

En conclusión, hemos probado que la formulación con integrales funcionales de la mecánica hamiltoniana da una caracterización topológica de los signos de los exponentes de Lyapunov (excepto cuando los números de Betti para las clases de cohomología de rango consecutivo son ambos nulos), y por lo tanto una caracterización de las propiedades de estabilidad para un dado sistema.

REFERENCIAS

[1] E.Gozzi, Phys. Lett. B **201**, 525 (1988).

[2] E.Gozzi and M.Reuter, Phys. Rev. D **40**, 3363 (1989).

[3] E.Gozzi and M.Reuter, CERN preprint CERN-TH 5422/89

[4] E.Witten, Nucl. Phys. B**202**, 253 (1982).

[5] A.J.Lichtenberg and M.A.Lieberman, *Regular and stochastic motion* (Springer-Verlag, New York, 1983).

[6] V.I.Oseledec, Trans. Moscow Math. Soc. **19**, 197 (1968).

[7] R.Graham, Europhys. Lett. **5**, 101 (1988).