CORRECCIONES RADIATIVAS DE LA QED EN EL MARCO DE LA TEORIA DE UNA PARTICULA

J.P.Aparicio, F.H.Gaioli*, E.T.García Alvarez*, D.F. Hurtado de Mendoza y A.J. Kálnay**

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires.

En un intento por caracterizar a las propiedades electromagnéticas de las partículas masivas de *spin* 1/2 Foldy propuso modificar a la ecuación de Dirac acoplando al campo electromagnético a través de una serie infinita de términos.

En este trabajo, partiendo de un principio variacional, obtenemos una ecuación de Dirac acoplada al campo electromagnético con los tres primeros términos de dicha serie.

Mostramos que la misma puede ser utilizada para obtener las las correcciones radiativas de la QED en el marco de la teoría de una partícula. El límite no relativista de dicha ecuación es discutido en detalle.

INTRODUCCION

Los datos obtenidos de la serie de experimentos iniciados por Naffe, Nelson y Rabi, [1] y por Lamb y Retherford, [2] fueron considerados por la mayoría de los físicos como una de las pruebas más acabadas de la reformulación de la QED producida en los finales de la década del 50. No obstante, desde entonces han aparecido varios trabajos [3-10] que intentan explicar de dinstintas maneras la fenomenología relacionada con las correcciones radiativas. En este contexto se inscribe el presente trabajo, cuyo propósito es demostrar que los principios generales de invariancia relativista y de *gauge*, permiten desarrollar un modelo alternativo para las correcciones radiativas del electrón en un campo exterior en el marco de la teoría de una partícula (primera cuantificación). Mostraremos que si bien dicha descripción gana en simplicidad respecto de la basada en el formalismo usual de la QED, el precio que debemos pagar a cambio es incrementar en dos el número de parámetros que caracterizan a las propiedades electromagnéticas del electrón. [11]

2. POSIBLES MODIFICACIONES AL LAGRANGIANO DE LA QED

2a-Ideas Generales

Pauli[12,13] fue el primero en notar que los principios de invariancia relativista y de *gauge* junto con el principio de correspondencia, no determinan unívocamente la forma del Lagrangiano de la Electrodinámica:

$$L_{QED} = \bar{\Psi}_i\, \gamma_\mu\, \partial_\mu\, \Psi - e\, \bar{\Psi}\, \gamma_\mu\, \Psi\, A_\mu - \qquad (1)$$
$$- m\, \bar{\Psi}\Psi - 1/4\, F^{\mu\sigma}\, F_{\mu\sigma}\, .$$

Entonces sumó al mismo un invariante formado por la contracción de la densidad de *spin* $\bar{\Psi}_0^{\mu\sigma}\, \Psi$ con el tensor de campo electromagnético $F_{\mu\sigma}$ como sigue:

$$L_{Pauli} = L_{QED} + (\chi/2)\, \mu_B \bar{\Psi}\sigma^{\mu\sigma}\, \Psi F_{\mu\sigma}\, , \qquad (2)$$

para tener en cuenta la posibilidad de describir partículas de *spin* 1/2 con momento magnético anómalo (neutrón y protón); ya que, como es sabido, el límite no relativista[14] de la ecuación que se deriva del Lagrangiano (2):

$$\gamma_\mu(i\partial_\mu - eA_\mu)\Psi = \qquad (3)$$
$$= m\Psi + (\chi/2)\, \mu_B \sigma^{\mu\sigma} F_{\mu\sigma}\Psi\, ,$$

es la ecuación de una partícula con momento magnético $(1+\chi)\, \mu_B$.

Algunos años después Foldy retomó las ideas de Pauli. Sin embargo, para ese entonces la ecuación (3) resultaba incompleta para caracterizar a las propiedades de los nucleones, a causa de que la teoría de los mesones agregaba un término de Darwin intrínseco a dicha ecuación en la forma:

* Becario de la Universidad de Buenos Aires.

** Nueva dirección: Laboratorio de Física Teórica, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC). Apartado Postal 21827, Caracas 1020 - A, Venezuela.

$$\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu}-eA_{\mu})\Psi = m\Psi + (\chi/2)\mu_B\sigma^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma}\Psi + + (ke/m^2)\, \gamma^{\mu}\, \Box A_{\mu}. \tag{4}$$

En este contexto, Foldy[15] se preguntó cuál era el término más general que podía agregar a la ecuación Dirac, y para contestar a esa pregunta formuló las siguientes hipotésis[15]:

H_a) que la ecuación sea covariante Lorentz e invariante de *gauge*,

H_b) que la interacción sea lineal en los potenciales electromagnéticos,

H_c) que los términos agregados no se anulen en el límite en que el impulso de la partícula tienda a cero y

H_d) que las distribuciones de carga y corriente asociadas con la partícula de Dirac sean suficientemente localizadas.

Este conjunto de hipótesis permitió a Foldy modificar la ecuación de Dirac en la forma:

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu})\Psi &= m\Psi + \sum_{n=0}^{\infty}[\varepsilon_n\gamma^{\mu}\Box^n A_{\mu} + \\ &+ (\mu_n/2)\, \sigma^{\mu\sigma}\Box^n F_{\mu\sigma}]\Psi \\ &= m\Psi + \varepsilon_o\gamma^{\mu}A_{\mu} + \varepsilon_1\gamma^{\mu}\Box A_{\mu} + \\ &+ (\mu_o/2)\sigma^{\mu\sigma}F_{\mu\sigma} + \dots ,\end{aligned} \tag{5}$$

donde hemos puesto los primeros coeficientes de la serie en términos de las constantes adimensionales e, k, χ en la forma:

$$\varepsilon_0 = e, \quad \varepsilon_1 = ke/m^2, \qquad \mu_0 = \chi\mu_B = \chi e/2m, \tag{6}$$

para identificar a la ecuación (3) con la (4).

En trabajos posteriores, Foldy[18] aplicó este resultado a la interpretación de las propiedades electromagnéticas de los nucleones, con referencia particular a la interacción neutrón-electrón. Tres años más tarde, Salzman [17] y Low también obtuvieron el resultado de Foldy (ecuación(5))usando el formalismo de matriz S.

2c- Nuestro modelo

En esta sección proponemos discutir un modelo para describir las correcciones radiativas en el marco de la teoría de una partículoa. Tomaremos un principio variacional como punto de partida, ya que el mismo tiene la ventaja de que de él se pueden derivar las ecuaciones de Dirac y de Maxwell simultáneamente. Teniendo como base las ideas desarrolladas en la sección anterior, vamos a considerar nuevamente la modificación del Lagrangiano de la QED, pero ahora haciendo las siguientes supocisiones:

H_1) la densidad Lagrangiana debe ser un escalar de Lorentz

$H_{2)}$ *e* invariante de *gauge*,

$H_{3)}$ supondremos que las ecuaciones resultantes deben ser lineales

H_4) y que la densidad Lagrangiana es de primer orden en los campos Ψ y A^{μ}.

H_1) y H_2) son esencialmente la hipótesis H_a de Foldy con la diferencia de que él mismo no hace uso explícito de H_2) en su trabajo. También es remarcable que debido a H_1), no vamos a considerar términos pseudo-escalares en la densidad Lagrangiana.

Por ejemplo, ese es el caso de la expresión

$$\bar{\Psi}\gamma^5\sigma^{\mu\sigma}\Psi F_{\mu\sigma}, \tag{7}$$

estudiada por Salpeter y Feinberg,[18] la cual permite dotar de momento dipolar eléctrico al electrón.

En definitiva, si nos atenemos al conjunto de hipótesis H_1) a H_4), entonces es posible probar que los únicos invariantes que podemos agregar al Lagrangiano de la QED son:

$$\bar{\Psi}\sigma^{\mu\sigma}\, \Psi F_{\mu\sigma}\ , \tag{8a}$$

$$\partial_{\mu}(\bar{\Psi}\gamma^{\sigma}\, \Psi)F_{\mu\sigma}\ , \tag{8b}$$

$$\bar{\Psi}\gamma^5\sigma^{\mu\sigma}\, \Psi F^{*}_{\mu\sigma}\ , \tag{8c}$$

$$\partial_{\mu}(\bar{\Psi}\gamma^5\gamma_{\sigma}\Psi)\, F^{*}_{\mu\sigma}\ . \tag{8d}$$

Nótese que los dos últimos son omitidos por Foldy, además de que, como consecuencia de H_4) la serie de Foldy se trunca en los primeros términos.

que será suficiente para nuestros propósitos:

$$L_G = L_{QED} - (\chi/2)\, \mu_B\, \bar{\Psi}\, \sigma^{\mu\sigma}\, \Psi\, F_{\mu\sigma} + \qquad (9)$$
$$+ k(e/m^2)\, \partial^\mu\, (\bar{\Psi}\, \gamma^\sigma\, \Psi)\, F_{\mu\sigma}\ .$$

Variando la acción correspondiente a la densidad Lagrangiana (9) respecto de Ψ y A_μ, podemos obtener respectivamente la ecuación (4):

$$\gamma^\mu\, (i\, \partial_\mu - e\, A_\mu)\, \Psi = m\Psi +$$
$$+ (\chi/2)\, \mu_B\, \sigma^{\mu\sigma}\, F_{\mu\sigma}\, \Psi + \qquad (10a)$$
$$+ k\, (e/m^2)\, (\partial^\mu\, F_{\mu\sigma}\, \gamma^\sigma\, \Psi\ ,$$

y las ecuaciones de Maxwell

$$\partial_\sigma F^{\sigma\mu} = J^\mu_G\ , \qquad (10b)$$

donde $J_G{}^\mu$ es la corriente de Noether correspondiente al Lagrangiano generalizado L_G. La nueva corriente contiene a la corriente de carga de Dirac más dos corrientes adicionales que provienen de los invariantes agregados. Su expresión es la siguiente:

$$J^\mu_G = [1 + (k/m^2)\Box]\ J^\mu_c + J^\mu_s\ , \qquad (10c)$$

donde $J_s{}^\mu$ y $J_s{}^\mu$ son las corrientes de carga y de *spin* respectivamente:

$$J^\mu_s = e\bar{\Psi}\, \gamma_\mu\, \Psi\ , \qquad (10d)$$

$$J^\mu_s = \chi\mu_B\, \partial_\sigma\, (\bar{\Psi}\, \sigma^{\sigma\mu}\, \Psi)\ , \qquad (10e)$$

ambas conservadas, como puede verificarse fácilmente usando sus respectivas definiciones, la ecuación (10a) y su adjunta de Dirac.

A pesar de que cada una de las ecuaciones (10) es lineal, apenas combinamos las mismas para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, nos encontramos con una ecuación integrodiferencial no lineal. Efectivamente, en el *gauge* de Lorentz, podemos usar la función de Green del d'Alambertiano para resolver las ecuaciones de Maxwell (10b):

$$A_\mu(x) = A_{self\mu}(x) + A_{ext\mu}(x) = \qquad (11a)$$
$$= \int D(x-x')\, J_{G\mu}(x')\, d^4x' + A_{ext\mu}(x)\ ,$$

$$\Box\ D\ (x-x') = \delta\ (x-x')\ , \qquad (11b)$$

en donde hemos agregado $A_{ext\mu}$ en (11a) para tener en cuenta a las fuentes externas de campo, lo cual hubiese correspondido a sumar un término del tipo $-J_{ext}{}^\mu A_\mu$ al Lagrangiano (9). Entonces, reemplazando (11a), tenemos

$$\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_{ext\mu})\ \Psi\ (x) = m\Psi(x) +$$
$$+ (\chi/2)\ \mu_B\sigma^{\mu\sigma}\ F_{ext\mu\sigma}\Psi(x) + \qquad (12a$$
$$+ k(e/m^2)\ (J_{ext\mu})\ \gamma^\mu\ \Psi(x') +$$
$$+ M_{self}(x)\ \Psi\ (x)\ ,$$

donde en

$$M_{self}(x) = e^2\, \gamma_\mu \int D\ (x-x')\ \Psi(x') \qquad (12b$$
$$\gamma_\mu\ \Psi(x')\ d^4x' + 0\ (\alpha)\ ,$$

hemos agrupado los términos no lineales provenientes de la autointeracción, siendo $0(\alpha)$ las contribuciones de mayor orden en la constante de estructura fina.
Barut[7-9] y colaboradores han mostrado en una serie de trabajos que del primer término de (12b) se siguen las correcciones radiativas del electrón en un campo electromagnético exterior. Nosotros hemos intentado conectar el formalismo de Barut con las formulaciones standard de la QED. Aunque nuestros cálculos son todavía preliminares, creemos que es posible establecer una conexión directa entre el mismo y la formulación del operador de masa de Schwinger.[19,20]
Los resultados anteriores indican entonces que si queremos modelar las correcciones radiativas con el agregado de nuevos términos al Lagrangiano de la QED, deliberadamente debemos omitir la autointeracción (12b), lo que equivale a considerar que en dicho Lagrangiano sólo figuran los campos electromagnéticos externos y que estos últimos no son variables dinámicas. En lo que sigue omitiremos los subíndices $_{self}$ y $_{ext}$ sobreentendiéndose siempre que se trata de campos y fuentes exteriores.

Queremos señalar aquí, anticipándonos a los resultados de la última sección que, identificando a los parámetros m y e con la masa y la carga renormalizadas respectivamente:

$$m = m_{bare}[1 + (3\alpha/2\pi)\ln(\Lambda/m_{bare}] \ , \quad \text{(13a)}$$

$$\alpha = e^2 = (e_{bare})^2 \ . \quad \text{(13b)}$$
$$.\{1 - [(e_{bare})^2/3\pi]\ln[M^2/(m_{bare})^2]\} \ ,$$

y eligiendo los siguientes valores para k y χ

$$k = -(\alpha/3\pi)\ [\ln\ (m/2k_{min}) + \quad \text{(13c)}$$
$$+ 5/6 - 3/8 - 1/5] \ ,$$

$$\chi = \alpha/2\pi \ , \quad \text{(13d)}$$

la ecuación (10a) es de primer orden en α, la ecuación de Dirac del electrón "vestido" después de haber efectuado las correcciones radiativas[21] m_{bare} y e_{bare} son la masa y la carga no renormalizadas y Λ y M son dos parámetros de corte que evitan las divergencias ultravioletas. El $k_{mín}$ que figura en la expresión (13c) es otro parámetro de corte que previene la catástrofe infrarroja, expresado en forma tal que permite un empalme directo del límite no relativista de la ecuación (10a) con el resultado de Bethe para el corrimiento Lamb.[22]

Antes de pasar a discutir este punto, en la sección siguiente vamos a examinar el significado de los términos agregados en el Lagrangiano, tomando el límite no relativista.

3- EL LIMITE NO-RELATIVISTA

La ecuación (10a) admite una forma Hamiltoniana:

$$i\,\partial_{\Box}\Psi = H_G\,\Psi \ , \quad \text{(14a)}$$

con

$$H_G = \beta m + \mathbf{E} + \mathbf{O} \ , \quad \text{(14b)}$$

donde en

$$\mathbf{E} = e\varphi - \chi\mu_B\beta\bar{\sigma}.\bar{E} + k(e/m^2)\nabla.\bar{E} \ , \quad \text{(14c)}$$

$$\mathbf{O} = \bar{\alpha}.\bar{\pi} + i\chi\mu_B\bar{\gamma}.\bar{E} + k(e/m^2)\bar{\alpha}.\bar{J} \ , \quad \text{(14d)}$$

hemos agrupado el resto de los términos pares (*E*) e impares (**O**) del Hamiltoniano H_g. Ahora nuestro propósito es separar la ecuación (14a) en una ecuación de dos componentes, una de las cuales describa los estados de energía positiva (electrón). Para ello efectuamos una transformación de Foldy-Wouthuysen-Tani,[23-25] eliminando así las partes impares del Hamiltoniano. Después de algunos cálculos puede verificarse que la proyección del Hamiltoniano en la representación de Foldy $(H_G)'$ (al orden $(v/c)^5$) sobre el subespacio de energías positivas de la partícula libre es:

$$H_{G\,non\text{-}rel} = \Lambda_+(H_G)'\Lambda_+ = m + (\pi^2/2m) -$$
$$- (\pi^4/8m^3) + e\varphi - \mu_B(1+\chi)\ \bar{\sigma}.\bar{B} -$$
$$- (e/8m^2)\ (1+2\chi)\ .$$
$$.\ (\nabla.\bar{E} + 2\bar{\sigma}.\bar{E}\times\bar{\pi} + i\bar{\sigma}.\nabla\times\bar{E}) +$$
$$+ ke/m^2\ (\nabla.\bar{E}) +$$
$$+ (ke/2m^3)\ [\bar{\alpha}.\bar{\pi},\bar{\alpha}.\bar{J}]_+ + \dots \ , \quad \text{(15)}$$

donde

$$\Lambda_+ = (1+\beta)/2 \ , \quad \text{(16)}$$

es el proyector sobre los estados de energía en la representación de Foldy de la partícula libre, cuya expresión coincide con la del operador que proyecta sobre la parte par en representación de Dirac.

Una inspección sobre la expresíon (15) muestra que el acoplamiento de Pauli, además de modificar el momento magnético normal del electrón, también contribuye al término de Darwin y a la interacción *spin*-órbita, la cual, como cabía esperar, solo se ve afectado el factor de Thomas[26] en la parte que corresponde al momento magnetico normal.[27] También aparece una contribución adicional omitida por Foldy (el último término de (15)), que discutiremos en un proximo trabajo.

4- CORRECCIONES RADIATIVAS

Como es sabido la QED prevé un desplazamiento de los niveles de energía que resultan de aplicar la ecuación de Dirac al átomo del hidrógeno. Dicho desplazamiento puede descomponerse en dos partes que tienen las siguientes expresiones[28]:

$$\delta E_{S(I)} = (e^3/3\pi m^2)[\ \ln (m/2k_{min}) + \\ + 19/30]\ \langle s\ |\nabla^2\varphi| s \rangle + \\ + e^3/4\pi m^2 \langle s\ |\bar{\sigma}.\bar{l}r^{-1}d\varphi/dr| s \rangle, \tag{17a}$$

$$\delta E_{S(II)} = (2e^2/3\pi) \sum_{s'} |\langle s\ |\ \bar{r}\ |\ s' \rangle|^2. \\ .\ (E_s - E_{s'})^3 \ln (m/2\ |\ E_s - E_{s'}) + \\ + (e^3/3\pi m) \ln (2k_{min}/m) \langle s\ |\ \nabla^2\varphi\ |\ s \rangle, \tag{17b}$$

donde los valores medidos se calculan utilizando las funciones de onda no relativistas (nótese que sumando ambas expresiones se elimina el parámetro d corte k_{min}).

La última de ellas es la principal contribución del corrimiento Lamb; es de carácter esencialmente no relativista y fue deducida originalmente por Bethe[29] en el año 1947 utilizando los métodos de la vieja teoría de perturbaciones. La primera expresión representa a las correcciones relativistas a la fórmula de Bethe, las cuales intentaremos modelar por medio de las modificaciones que introducimos en las secciones anteriores al Lagrangiano de la Electrodinámica. En efecto, utilizando el Hamiltoniano (15) especializado para el caso particular del campo producido por el potencial de electrostático del átomo de hidrógeno, con las constantes k y χ que anotamos en (13), el cálculo a primer orden en teoría de perturbaciones conduce a la expresión (17a). Recíprocamente, si no conocieramos los valores de k y χ que da la teoría, el cálculo anterior hubiera conducido a un corrimiento:

$$\delta E_{S(I)} = (e/8m^2)(2\chi - 8k) \langle s\ |\ \nabla^2\varphi\ |\ s \rangle + \\ + e\chi/2m^2 \langle s\ |\ \bar{\sigma}.\bar{l}r^{-1}d\varphi/dr\ |\ s \rangle, \tag{18}$$

que, contrastando con los datos experimentales, nos permitiría hallar los valores numéricos de las constantes adimensionales k y χ.

A falta de otra explicación teórica, hubiésemos pensado que dichas constantes, que caracterizan a las propiedades electromagnéticas, podrían ponerse en pie de igualdad con la masa y la carga del electrón, lo que prueba una vez más que el número de constantes universales que adoptamos hoy día no es otra cosa que una medida de nuestra ignorancia.[30]

REFERENCIAS

1 J.E. Nafe, E.B. Nelson y I.I. Rabi, Phys. Rev. **71**, 914 (1947).
2 W.E. Lamb y R. C. Retherford, Phys. Rev. **72**, (1947).
3 T.A. Welton, Phys. Rev. **74**, 1157 (1948).
4 Z. Koba, Prog. Theor. Phys. **4**, 319 (1949).
5 K. Huang, Am. J. Phys. **20**, 749 (1952).
6 H. Aspden, Phys. Lett. **119A**, 109 (1986).
7 A.O. Baraut y J. Kraus, Found. of Phys. **13**, 189 (1983).
8 A.O. Baraut, *Quantum- Electrodynamics Based on Self Energy*, ICPT Triestre, preprint IC/87/-248 (1987).
9 A.O. Baraut, " *New Frontiers in Quantum Electrodynamics and Quantum Optics*," (Plenum, 1991).
10 F. Reuse, Hel. Phys. Acta **51**, 157 (1978).
11 La idea de incrementar el número de constates fundamentales para construir un modelo que permita ajustar las correcciones radiativas de la Q. E. D., fue utilizada por Reuse (véase ref. 10) en el marco de una formulación manifiestamente covariante de la Mecánica Cuántica Relativista que utiliza una derivación cuántica de Fock generalizada con respecto al tiempo propio (una breve discusión de esta derivada puede encontrarse en J. P. Aparicio, F. H. Gaioli, E.T. Garcia Alvarez, D.F. Hurtado de Mendoza y A.J Kálnay, "Derivación Cuántica Generalizada con Respecto al Tiempo Propio II,"Anales AFA, Vol. 3 , 1991).
12 W. Pauli, *General Principles of Quantum Mechanics* (Traslation of *Wellenmechanick*, Han dbuch der Physick **24**, 1933), (Springer Verlag, 1980). chap. 9.
13 W.Pauli, Rev. Mod. Phys. **13**, 203 (1941).
14 Véase por ejemplo R.P. Feynman, *Quantum Electrodinamics* (Cal.Tech. Lectures 1953),

"(Benjamin, 1961), lec.12.
15 L.L. Foldy, Phys.rev. **87**, 688 (1952).
16 L.L. Foldy, Rev. Mod.Phys. **30**,471 (1958).
17 G.Salzman, Phys.Rev. **99**, 973 (1955).
18 G. Feinberg, Phys. Rev. **112**, 1637 (1958); E.E. Salpeter. ibid.**112**, 1643 (1958).
19 J.Schwinger, Phys.Rev. **82**, 664 (1951).
20 J. Schwinger, Proc.Nat.Acad. Sci. **37**, 452 (1951).
21 H.A.Bethe andd E.E. Salpeter, "*Quantum Mechanics of One-two Electron System*," Hanbuch der Physik **35** I (1957), sec. 18.
22 Véase por ejemplo J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, (Addison-Wesley, 1967), pag. 293.
23S. Tany, Soryushiron HKenkyu, **1**; 15 (1949).
24 S. Tani, Prog. Theor. Phys. **6**, 267 81952).
25 L.L. Foldy and S.A. Wouthuysen, Phys.Rev. **78**, 29(1950).
26 L.H. Thomas, Philos. Mag. **3**,1 (1927).
27 Véase por ejmplo J.D. Jackson, *Classical Electrodinamics*, (John Wiley & Sons., 1957), cap. 11.
28 Vésase por ejmplo V. B. Berestetskii, E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, *Relativistic Quantum Theory*, (Pergamon Press, Press, 1971), cap. 12.
29 H. A. Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947).
30 J. M. Levy-Leblond, Nuovo Cimento **7**, 187 (1977).