DESCRIPCION SEMICLASICA DEL MOMENTO MAGNETICO ANOMALO Y DE LA ANOMALIA QUIRAL

A. Della Selva
Dipartimento di Fisica dell'Universitá de Napoli e Instituto Nazionale di Fisica Nucleare Sezione di Napoli, Italia.
L. Masperi
Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro, Comisión Nacional de Energía Atómica y Universidad Nacional de Cuyo, C.C. 435, 8400 S.S. de Bariloche.

Se muestra que el mismo término de una ecuación de Bargmann-Michel-Telegdi que explica la corrección radiativa a primer orden del momento magnético del electrón, produce variación de la helicidad en el límite de impulso infinito en presencia de un campo eléctrico longitudinal.

Un trabajo reciente(1) ha indicado que para pequeños impulsos, y para spin proporcional al campo magnético, la variación de la helicidad está dada por una expresión formalmente equivalente a la anomalía quiral si se incluyen fluctuaciones cuánticas. Pensando que hay una cancelación(2) entre la ruptura de simetría explícita debida a masa grande y la anomalía propiamente dicha, esta última está así estimada semiclasicamente. También se ha mostrado(3) perturbativamente que la anomalía y el momento magnético anómalo deberían estar relacionados a través de diagramas de correcciones radiativas vinculados por la conservación del impulso angular total.

En un artículo anterior se había encontrado que una modificación(4) de la ecuación de Bargmann-Michel-Telegdi (BMT)(5) que considera la velocidad instantánea del electrón podía explicar el momento magnético anómalo de primer orden a través de las fluctuaciones de la radiación de punto cero. En la presente nota describimos cómo ese mismo término de la ecuación de BMT produce una variación no nula de la helicidad en el límite de impulso infinito en presencia de campo eléctrico longitudinal.

Recordamos que la ecuación BMT es

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = c_1 F^{\mu\upsilon} a_\upsilon + c_2 u^\mu F^{\upsilon\lambda} u_\upsilon a_\lambda \qquad (1)$$

donde en el sistema de reposo $p^\mu = (m,\mathbf{0})$ $a^\mu=(0,\varphi)$, con $1/2\ \varphi = \langle s \rangle$ spin promedio, y τ tiempo propio.

En el tratamiento usual donde $u^\mu = p^\mu/m$, la ecuación en el sistema de reposo en presencia de campo magnético y la ecuación relativista clásica para una partícula en un campo electromagnético $F^{\mu\upsilon}$ implican

$$c_1 = 2\mu \ ; \ - c_2 = 2\mu' = 2\,(\mu - e/2m) \qquad (2)$$

siendo por lo tanto μ' el momento magnético anómalo.

Se debe también señalar que con este tratamiento existe una variación con el tiempo de la polarización según la dirección del movimiento φ, en presencia de campos transversales(6) y que esta variación continúa siendo no nula en el límite de impulso infinito si $\mu' \neq 0$.

Si, en cambio, consideramos u^μ como una suerte de velocidad instantánea no igual a p^μ/m, y se entiende que se debe tomar un promedio en el segundo término de la Ec. (1) denominando c_1 y c_2 las nuevas constantes, en el sistema de reposo cuando sólo hay campo magnético, tendremos

$$\frac{d\varphi^i}{dt} = \tilde{c}_1 F^{ij} a_j + \tilde{c}_2 u^i F^{jk} u_j a_k \qquad (3)$$

Suponiendo que el primer término da el factor giromagnético normal para una relación constante de distribuciones de carga *a* masa debe ser

$$\tilde{c}_1 = \frac{e}{2m} \qquad (4)$$

Si, similarmente, el segundo término de la Ec.(3) completa, mediante el *zitterbewegung*, el factor giromagnético de Dirac, debe ser $c_2 \langle u^1 u_1 \rangle = e/2m$. Podemos elegir $\langle v^2/(1-v^2) \rangle = 1$, donde v es el módulo de la velocidad instantánea, resultando entonces

Si agregamos independientemente el efecto de

$$\frac{\tilde{c}_2}{3} = -\frac{e}{2m} \qquad (5)$$

Si agregamos independientemente el efecto de la radiación de punto cero a la Ec.(3), con los valores de $\tilde{c}_1$ y $\tilde{c}_2$ dados por las Ecs.(4) y (5), como una corrección no relativista

$$\delta\, \ddot{\mathbf{r}}_R = \frac{e}{m} \mathbf{E}_R \qquad (6)$$

y tomamos el promedio de la componente de Fourier del campo eléctrico $\langle E^R{}_\omega{}^2\rangle = \omega^3/2\,\pi^2$ para reproducir la energía de punto cero[7], el promedio del cambio de velocidad será

$$\langle|\delta\ v_R|^2\rangle = \frac{e^2}{2\,\pi^2\, m^2} \int d\omega\ \omega = \frac{\alpha}{\pi} \qquad (7)$$

donde se ha usado un *cut-off* superior ω_c=m.

Hay que notar que el cálculo semiclásico equivalente del corrimiento de Lamb, al utilizar $|\delta r_R|^2$ requiere también un *cut-off* inferior dado por ω_c' = (radio de Bohr)$^{-1}$, cuya necesidad no aparece en el cálculo del momento anómalo, lo cual es satisfactorio porque no tendría sentido físico.

Ahora la ecuación de BMT modificada cambiará la Ec. (3) a

$$\frac{d\varphi}{dt} = 2\ .\ \frac{e}{2m}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi \times \mathbf{B} \qquad (8)$$

mostrando que el momento magnético anómalo se ha obtenido a través de un aumento efectivo de la longitud de polarización en la ecuación de precesión debido a la radiación de punto cero. Esto difiere de los tratamientos anteriores que partían de una ecuación de precesión clásica para el spin, con lo que la introducción de las fluctuaciones de la radiación de punto cero tendía a disminuir la longitud de polarización efectiva dando un signo equivocado a la corrección del momento magnético [8].

Hay que notar que el valor preciso $\alpha/2\pi$ de la corrección del momento magnético obtenido, que coincide con el cálculo perturbativo de primer orden, es consecuencia de la elección de $\langle v^2/(1 - v^2)\rangle$.

Ahora dedicamos nuestra atención a la helicidad

$$\varphi_{\prime} = \frac{1}{m}\left(a_{\prime}\,\varepsilon - a_0\,|\,\mathbf{p}\,|\right)$$

y estudiamos su variación en el límite de velocidad global $|\,\mathbf{p}\,|/\varepsilon \to 1$, donde coincide con la quiralidad por poder despreciarse el efecto de la masa.

El uso de la ecuación de movimiento de la partícula y propiedades de transformación llevan a

$$a_{\prime}\,\frac{d\varepsilon}{d\tau} - a_0\,\frac{d}{d\tau}\,|\,\mathbf{p}\,| = 0 \qquad (10)$$

Por lo tanto

$$\frac{d\varphi_{\prime}}{d\tau} = \frac{1}{m}\left(\frac{da_{\prime}}{d\tau}\,\varepsilon - \frac{da_0}{d\tau}\,|\,\mathbf{p}\,|\right) \qquad (11)$$

La utilización de la Ec.(1) para campo eléctrico longitudinal en la Ec.(11) muestra que la construcción de los términos proporcionales a c_1 se anulará puesto que $a_o\varepsilon$ - $a_{\prime}\,|\,\mathbf{p}\,|$ = 0. Por lo tanto queda

$$\frac{d\varphi_{\prime}}{dt} = \tilde{c}_2\, E_{\prime}\Big[-\langle\mu_{\prime}^2\rangle\, a_o + \qquad (12)$$
$$+ \langle\mu_{\prime}\, \mu_0\rangle\left(a_{\prime} + a_0\,\frac{|\,\mathbf{p}\,|}{\varepsilon}\right) - \langle\mu_0^2\rangle\, a_{\prime}\,\frac{|\,\mathbf{p}\,|}{\varepsilon}\Big]$$

Si los promedios corresponden a velocidades globales como sucede en la ecuación BMT normal

$$\langle\mu_{\prime}^2\rangle_{glob} = \frac{|\,\mathbf{p}\,|}{m^2}\ ;\ \langle\mu_0^2\rangle_{glob} = \frac{\varepsilon^2}{m^2}, \qquad (13a)$$

$$\langle\mu_{\prime}\, \mu_0\rangle = \frac{|\,\mathbf{p}\,|}{m}\frac{\varepsilon}{m} \qquad (13b)$$

y la Ec.(12) da

$$\left.\frac{d\varphi_{\prime}}{d\tau}\right|_{glob} = 0 \qquad (14)$$

La contribución del *zitterbewegung* a la Ec.(12) es difícil de evaluar en detalle por su naturaleza relativista, pero puede suponerse que dará variación nula de la helicidad en concordancia con el hecho de que para $\mu' = 0$ un campo longitudinal no puede alterarla.

Para la radiación de punto cero que produce fluctuaciones de velocidad no relativistas la Ec. (13a) no será válida siendo $(\delta u_{\prime})^2$ la corrección más relevante. Calculándola en el sistema de reposo y transformándola al sistema donde la partícula tiene impulso, puesto que para pequeñas fluctuaciones

$$\delta v'_{\prime} = \delta v_{\prime} ; \quad \delta v'_{\perp} = \sqrt{1 - \frac{p^2}{\varepsilon_2}}\, \delta v_{\perp} , \tag{15}$$

podemos tomar como transformación del promedio

$$\langle (\delta v')^2 \rangle = \sqrt{1 - \frac{|p|^2}{\varepsilon_2}}\, \delta v_{\perp} . \tag{16}$$

Por lo tanto obtenemos

$$\left. \frac{d\varphi_{\prime}}{d\tau} \right|_R = \frac{e}{m} E_{\prime} \frac{\alpha}{\pi} \frac{|p|}{\varepsilon} \varphi_{\prime} \tag{17}$$

que da un cambio no nulo de helicidad en el límite $|p| / \varepsilon \rightarrow 1$.

Para dar a la Ec.(17) un aspecto más atractivo podemos expresar el campo magnético que circula a una distancia de la longitud de Compton λ_c alrededor de la corriente

$$J = \frac{e\,|p|}{\lambda_c\, \varepsilon} = 2\pi\, \lambda_c\, B \tag{18}$$

de modo tal que para $\varphi_{\prime} \approx 1$ se tiene

$$\frac{1}{\lambda_c^3} \frac{d\varphi_{\prime}}{d\tau} \approx \frac{\alpha}{\pi} E_{\prime} B \tag{19}$$

correspondiendo a la variación de quiralidad por unidad de volumen.

Está claro que la aparición de esta variación de la quiralidad es debida al campo eléctrico longitudinal tal como ha sido sugerido como origen de la anomalía[9] causada por una afectación del mar de Dirac que en el presente tratamiento está reflejado en la parametrización de la ecuación de BMT basada en el *zitterbewegung*. Con esto se ha logrado estimar semiclásicamente la anomalía directamente en el límite en el que la masa es despreciable y sin necesidad de la proporcionalidad del spin con el campo magnético, relacionandola con el momento magnético anómalo producido por la misma ecuación.

REFERENCIAS

1. O.V.Teryaev, publicación de ICTP IC/90/422.
2. A.H.Mueller, Phys. Lett. B **234**, 517 (1990).
3. O.V.Teryaev, publicación de ICTP IC/90/429.
4. L.Masperi, Rev. Brasileira de Física **19**, 315 (1989).
5. V.Bargmann, L.Michel y V.L.Telegdi, Phys.Rev.Lett. **2**, 435 (1959).
6. V.B.Berestetskii, E.M.Lifshitz y L.P.Pitaevskii, *Relativistic Quantum Theory*, Pergamon Press, London (1971), p. 127.
7. J.D.Bjorken y S.D.Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, Mc.Graw Hill, New York (1964) p. 59.
8. C.Itzykson, publicación del CERN TH. 1703.
9. H.B.Nielsen y M.Ninomiya, publicación del Niels Bohr Inst. NBI-HE-91-08.