INVARIANCIA CONFORME EN EL MODELO σ NO LINEAL $N = 2$.

G.Aldazábal*, J.M.Maldacena.
Centro Atómico Bariloche, Instituto Balseiro, CC 439, 8400 San Carlos de Bariloche.

Estudiamos la anomalía conforme del modelo σ no lineal con dos supersimetrías (N=2). Calculamos el álgebra de los operadores con un formalismo explícitamente supersimétrico. Utilizamos una generalización del método de coordenadas normales que permite que el desarrollo perturbativo sea (hasta el orden requerido) covariante. La anulación de los términos anómalos impone que el espacio-tiempo cumpla la ecuación $R_{ij} = 0$ (Ecuación de Einstein en el vacío).

INTRODUCCION

Los modelos σ no lineales tienen particular interés en las compactaciones de cuerdas. En tal caso la cuerda vive en $M^4 \times K$ (M^4 es el espacio de Minkowski y K una variedad compacta) y su dinámica queda descripta por un modelo σ con valores en esta variedad. La supersimetría en el espacio-tiempo requiere que sobre K la teoría sea N = 2 superconforme [1,2]. Por otro lado la teoría con N=2 local sobre la hoja de mundo tiene características interesantes. Mientras que para N = 0,1 hay infinitas partículas, este caso posee una única partícula física[3] (un escalar) que da origen a una teoría de gravedad autodual[4,5].

La invariancia conforme, así como restringe la dimensión del espacio (D = 10 para N = 1), impone condiciones sobre la métrica de la variedad. Estas han sido estudiadas [6,7] con la función β. Un método alternativo consiste en calcular el producto de operadores de los generadores del álgebra e identificar los términos anómalos[8,9]. El formalismo explícitamente covariante que se usa para N = 0 y N= 1 no se puede aplicar debido a una condición de "quiralidad" que es necesario imponer para tener supersimetría explícita. Ha habido intentos de solucionar este problema [10]. Hemos encontrado un método que permite mantener explícitas ambas simetrías. Al pedir que los términos anómalos sean cero obtenemos la ecuación $R_{ij} = 0$, como se obtiene por otros métodos[6].

DESCRIPCION DEL MODELO

Para que un modelo σ no lineal tenga dos supersimetrías es necesario que el espacio de llegada sea de Kähler[11], esto resulta de la teoría clásica. Estos espacios admiten coordenadas complejas X^α, $\tilde{X}^\beta$ y su métrica puede derivarse a partir de un escalar: el potencial de Kähler K (X, $\tilde{X}$) de modo que

$$ds^2 = K_{,\alpha\beta} dX^\alpha\, d\tilde{X}^\beta$$

La formulación supersimétrica tiene lugar en el superespacio de N=2 descripto por las coordenadas $Z = (z, \theta_+, \tilde{\theta}_+, \bar{z}, \theta_-, \tilde{\theta}_-)$. Se definen las derivadas covariantes

$$D_a = \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}^a} - (\partial\theta)_a \qquad \tilde{D}_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a} - (\partial\tilde{\theta})_a$$

que obedecen el álgebra

$$\{D_a, D_b\} = 0 \quad \{\tilde{D}_a, \tilde{D}_b\} = 0 \quad \{D_a, \tilde{D}^b\} = 2\partial_a^b$$

Otro ingrediente que necesitamos son los supercampos $\phi^\alpha(Z)$. El supercampo general tiene 16 componentes, pero nosotros necesitamos solo 4. Una representación más reducida del álgebra de supersimetría se logra imponiendo las condiciones de quiralidad

$$\tilde{D}_a\phi^\alpha = 0 \qquad D_a\tilde{\phi}^\beta = 0 \tag{1}$$

de manera que, con estas condiciones

$$\phi = x(y) + \tilde{\theta}\psi(y) + \tilde{\theta}^2 F(y)$$

$$\text{con } y_+ = z + \tilde{\theta}_+\theta_+ \quad y_- = \bar{z} + \tilde{\theta}_-\theta_- ,$$

en términos de estos supercampos la acción se escribe como

Este modelo es invariante frente a transformaciones

* Investigador CONICET

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z d^4\theta\ K(\phi, \tilde{\phi}) \qquad (2)$$

conformes, 2 supersimetrías y una simetría U (1). Todos estos generadores se puden incluir en un supercampo

$$J^{\mu} = \frac{-8}{\alpha'}\tilde{D}\ \tilde{\phi}^{\beta}\gamma^{\mu}D\phi^{\alpha}K_{,\alpha\beta}(\phi, \tilde{\phi}) = $$
$$= j^{\mu} + \theta\gamma^{\mu}\tilde{S} + \tilde{\theta}\gamma^{\mu}S + \tilde{\theta}\gamma_{\upsilon}\theta T^{\mu\upsilon} \qquad (3)$$

Tal como sucede en los casos N = 0,1 con los respectivos generadores, se puede ver que, usando las ecuaciones de movimiento, J_+ depende sólo de $(z, \theta_+, \tilde{\theta}_+)$ y que el álgebra se descompone en A × $\tilde{A}$ siendo J_+ el generador de A. De ahora en más consideraremos sólo la parte holomorfa.

El álgebra N=2 superconforme se escribe en términos del producto de operadores de la siguiente forma

$$J_+(Z)J_+(Z') = \frac{4\hat{c}}{(\Delta Z)^2} + \frac{4\tilde{\delta}_+\delta_+}{(\Delta Z)^2}J_+(Z_c) + $$
$$+ \frac{2(\tilde{\delta}_+D_+ - \delta_+\tilde{D}_+)}{\Delta Z}J(Z_c) \qquad (4)$$

donde

$$Z_c = \frac{Z+Z'}{2} \quad \tilde{\delta}_+ = \tilde{\theta}_+ - \tilde{\theta}'_+ \quad \delta_+ = \theta_+ - \theta'_+$$

$$\Delta Z = z - z' - \theta_+\tilde{\theta}'_+ - \tilde{\theta}_+\theta'_+$$

$\hat{c}$ = 3 × carga central (vale 1 para un solo supercampo).

METODO DE CALCULO

El método consiste en calcular correcciones cuánticas alrededor de un campo clásico ϕ^{α}_0, solución de las ecuaciones de movimiento. Si se escribe $\phi^{\alpha} = \phi^{\alpha}_0 + \pi^{\alpha}$ y se toma a π^{α} como campo cuántico, el desarrollo perturbativo no es explícitamente covariante. En los casos N = 0,1 esto se soluciona con el método de coordenadas normales[12] que consiste en unir ϕ^{α}_0 con ϕ^{α} por medio de una geodésica y tomar como campo cuántico al vector tangente a la geodésica en ϕ_0, o sea $\xi^{\alpha} \equiv d\phi^{\alpha}/dt\ (t=0)$, el cual transforma como vector ante transformaciones de coordenadas.

Este método no se puede aplicar en nuestro caso, debido a que la condición de quiralidad $\tilde{D}\ \phi = 0$ involucra solo la parte holomorfa, mientras que la ecuación de la geodésica mezcla ambas partes. Nuestro método se basa en la observación que sólo es necesario preservar la covariancia frente a transformaciones holomorfas de coordenadas, pues al elegir coordenadas complejas ya se pierde la invariancia explícita ante transformaciones generales de coordenadas. Esto nos permite unir ϕ_0 con ϕ con una curva que cumple la ecuación

$$\ddot{\phi}^{\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\ (\phi(t), \tilde{\phi}_0)\ \dot{\phi}^{\beta}\ \dot{\phi}^{\delta}$$

y tomar como campo cuántico al vector tangente como en el caso anterior.

Luego de este desarrollo, la acción (2) queda

$$S = S_0 + \frac{1}{2\pi\alpha'}\int K_{,\alpha\beta}\xi^{\alpha}\tilde{\xi}^{\beta} + 1/4\ R_{\alpha\delta\beta\varepsilon}\xi^{\alpha}\xi^{\delta}\tilde{\xi}^{\beta}\tilde{\xi}^{\varepsilon} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{4}(\nabla_{\delta_1}\ldots\nabla_{\delta_n}K\xi^{\delta_1}\ldots\xi^{\delta_n} +$$
$$+ \nabla_{\tilde{\delta}_1}\ldots\nabla_{\tilde{\delta}_n}K\tilde{\xi}^{\delta_1}\ldots\tilde{\xi}^{\delta_n}) + \ldots$$

mientras que la supercorriente (3) toma la forma

$$J_+ = J_{+0} + \frac{8}{\alpha'}[\tilde{D}_+\tilde{\phi}^{\beta}_0 \mathbf{D}_+\xi^{\alpha}K_{,\alpha\beta} +$$
$$+ \tilde{\mathbf{D}}_+\tilde{\xi}^{\beta}D_+\phi^{\alpha}_0 K_{,\alpha\beta} + \tilde{\mathbf{D}}_+\tilde{\xi}^{\beta}\mathbf{D}_+\xi^{\alpha}K_{,\alpha\beta} +$$
$$+ \tilde{D}_+\tilde{\phi}^{\beta}_0 D_+\phi^{\alpha}_0 R_{,\alpha\beta\delta\varepsilon}\xi^{\delta}\tilde{\xi}^{\varepsilon}] + \ldots$$

donde hemos introducido la derivada covariante

$(\mathbf{D}_+)^{\alpha}_{\varepsilon} = \delta^{\alpha}_{\varepsilon}D_+ - \omega^{\alpha}_{D_+\varepsilon}$, con la conexión $\omega^{\alpha}_{D_+\varepsilon} = -\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\delta}D_+\phi^{\delta}_0$.

La condición de quiralidad (1) resulta

$$Q^{\alpha}_a = \tilde{\mathbf{D}}_a\xi^{\alpha} - 1/2\ R^{\alpha}_{\delta\varepsilon\beta}\ \tilde{D}_a\ \tilde{\phi}^{\beta}_0\ \xi^{\delta}\ \xi^{\varepsilon} + \ldots$$

Esta condición será impuesta por medio de multiplicadores de Lagrange, o sea sumando a la acción el término el término

$$\tilde{\lambda}^{a}_{\alpha}\, Q^{\alpha}_{a} + \lambda^{a}_{\beta}\, \tilde{Q}^{\beta}_{a}$$

Este término tiene una simetría de calibre que se debe, esencialmente, a que el operador D_a no es inversible. Si se trata de fijar el calibre en forma covariante la acción de los fantasmas vuelve a tener una simetría de calibre y así *ad infinitum*. La solución consiste en poner una condición de calibre no covariante tal que los fantasmas de los fantasmas se desacoplen. Es aquí donde nuestro método se vuelve no covariante, sin embargo, estos términos no contribuyen a nuestro cálculo.

Para hacer los cálculos es conveniente introducir en cada punto un sistema ortonormal o "*vielbein*" y referir los vectores a ese sistema

$$K_{,\alpha\beta} = e^{a}_{\alpha}\, e^{\bar{a}}_{\beta} \qquad \xi^{a} = e^{a}_{\alpha}\, \xi^{\alpha}$$

Rescribimos la acción con estas variables. El término cuadrático queda

$$S_2 = \int \xi^{a}\, \xi^{\bar{a}} + \tilde{\lambda}_{r}\, \tilde{D}\, \xi^{r} + \lambda_{\bar{s}}\, D\, \xi^{\bar{s}}$$

La parte de la conexión que aparece en las derivadas covariantes fue tomada como un término de interacción más.

CALCULO DEL PRODUCTO DE OPERADORES.

En el producto $J_+(Z)J_+(Z')$ calculamos los términos divergentes cuando $Z \to Z'$. Debido a que ϕ_0 es una solución arbitraria de las ecuaciones de movimiento, basta calcular el valor medio de este producto. Prestamos atención sólo a los términos que no tengan θ_- ó $\tilde{\theta}_-$ debido a que éstos están relacionados con el producto de las componentes auxiliares de la supercorriente. Al calcular términos anómalos debemos tener en cuenta las contribuciones al valor medio de la supercorriente que aparece en el miembro de la derecha del producto de operadores (4).

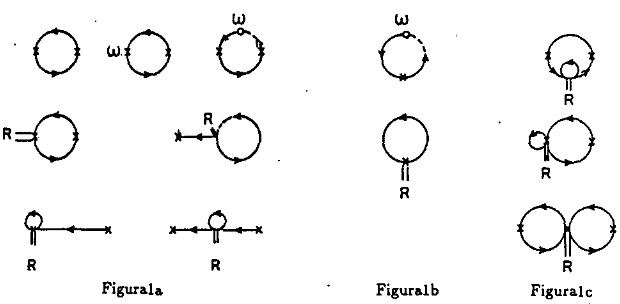

Figura 1: Gráficos que contribuyen a (a) producto $\langle JJ \rangle$, (b) valor medio de la corriente $\langle J \rangle$, (c) carga centra a dos lazos.
$\times$ Indica una supercorriente, $\rightarrow$— indica un propagador $\langle \xi\bar{\xi} \rangle$, $\rightarrow$– – indica un propagador $\langle \lambda\tilde{\xi} \rangle$, $=$ indica un campo externo, R indica una curvatura, ω indica una conexión.

A un lazo tenemos los gráficos que se muestran en la figura 1a., cuyo resultado, luego de restar los gráficos que contribuyen a $\langle J \rangle$ (figura 1b), es

$$-\frac{4D}{(\Delta Z)^2} + 6\, \frac{\Delta\bar{Z}}{(\Delta Z)^2}[\bar{\delta}_+ D_-(R_{\beta\alpha}\tilde{D}_-\tilde{\phi}^{\beta} D_+\phi^{\alpha}) - \delta_+\tilde{D}_-(R_{\beta\alpha}\tilde{D}_+\tilde{\phi}^{\beta} D_-\phi^{\alpha})] \qquad (5)$$

donde D indica la dimensión (compleja) del espacio.

Calculamos la contribución a la carga central a dos lazos (figura 2c) obteniendo

$$\frac{-\alpha' R}{(\Delta Z)^2} \qquad (6)$$

Finalmente obtenemos, sumando (5) y (6)

$$\langle J_+(Z)J_+(Z') \rangle - \frac{4\bar{\delta}_+\delta_+}{(\Delta Z)^2}\langle J_+(Z_c) \rangle - \frac{2\,(\bar{\delta}_+ D_+ - \delta_+\tilde{D}_+)}{\Delta Z}\langle J_+(Z_c) \rangle = -\frac{4D - \alpha' R}{(\Delta Z)^2} + 6\, \frac{\Delta\bar{Z}}{(\Delta Z)^2}[\bar{\delta}_+ D_-(R_{\beta\alpha}\tilde{D}_-\tilde{\phi}^{\beta} D_+\phi^{\alpha}) - \delta_+\tilde{D}_-(R_{\beta\alpha}\tilde{D}_+\tilde{\phi}^{\beta} D_-\phi^{\alpha})]$$

Si pedimos que los términos anómalos se anulen obtenemos

$$R_{\alpha\beta} = 0 ,$$

además, en tal caso, se anula la corrección a la carga central. El término 4D será compensado por los fantasmas de los difeomorfismos y que, para la cuerda con N=2 local, fija la condición D=2 (2 complejas, 4 reales).

CONCLUSIONES

Hemos encontrado un método covariante y supersimétrico para calcular la anomalía en forma más clara que el de la función β. Una posible extensión a nuestro trabajo sería ir a mayor número de lazos ya que se han encontrado contribuciones a la función β para 4 lazos[7]. También se puede tratar de incluir el dilatón y tensor antisimétrico tal como se ha hecho para el caso de N = 0,1 [8,9].

REFERENCIAS

[1] P.Candelas, G.Horowitz, A.Strominger and E.Witten, Nucl. Phys. B258 (1985) 46.
W. Boucher, D.Friedan, A.Kent, Phys. Lett. 172B (1986) 316.
A.Sen, Nucl.Phys. B278 (1986) 289; Nucl.-Phys. B284 (1987) 423.
T.Banks, L.J.Dixon. D. Friedan, E.Martinec, Nucl. Phys.. B299 (1988) 613.

[2] D.Gepner "*Lectures on N = 2 String Theories*" en Summer School in High Energy Physics and Cosmology, Trieste, (1989).

[3] M.Ademollo, L.Brink, A.D'Adda, R. D'Auria, E. Napolitano, S.Sciuto, E.Del Giudice, P. Di Vecchia, S. Ferrara, F. Gliozzi, R.Musto, R.Pettorino y J.H. Schwarz. Nucl. Phys. B111 (1976) 77.

[4] C. Vafa y H.Ooguri, prepublicación de Princeton HUTP - 90 / A024

[5] S. D. Mathur y S.Mukhi, Nucl. Phys. B302 (1988) 130.

[6] L.Alvárez-Gaumé y D.Z.Freedman, Phys.Rev. D22 (1980) 846.

[7] M.T.Grisaru, A.E.M.Van de Ven y D.Zanon, Phys. Lett. B 173 (1986) 423.

[8] Banks, Nemeschansky y Sen, Nucl. Phys. B277 (1986) 67

[9] G.Aldazabal, F.Hussain y R.Zhang, Phys. Lett. B185 (1987) 89
G.Aldazabal, F.Hussain y R.Zhang, prepublicación ICTP/86/400.

[10] P.S. Howe, G.Papadopoulos. Phys. Lett. B 174 (1986) 405

[11] L.Alvárez - Gaumé y D.Z.Freedman, Comm. Math. Phys. 84 (1981) 443

[12] L. Alvárez - Gaumé, D.Z. Freedman y Mukhii, Ann.Phys. 134 (1981) 85.

PROPIEDAD CONICET
Programa de Apoyo a Bibliotecas
5/12/92
Fecha rec.
BIBLIOTECA 4LA
Nº INV