

# INFORMACIÓN DE FISHER Y TERMODINÁMICA DE LA DESLOCALIZACIÓN

## FISHER INFORMATION AND DELOCALIZATION THERMODYNAMICS

F. Pennini<sup>1,2</sup>, A. Plastino<sup>1</sup> and G.L. Ferri<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Física La Plata (CONICET-IFLP), Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata (UNLP), C.C. 727, (1900) La Plata, Argentina*

<sup>2</sup>*Departamento de Física, Universidad Católica del Norte, Av. Angamos 0610, Antofagasta, Chile*

<sup>3</sup>*Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Pampa, Peru y Uruguay, Santa Rosa, La Pampa, Argentina. glferri@exactas.unlpam.edu.ar*

Establecemos relaciones de tipo termodinámico entre i) el grado de deslocalización en el espacio de fases, ii) la medida de información de Fisher, y iii) la entropía canónica de Shannon para el oscilador armónico cuántico unidimensional. Esto provee un nuevo punto de vista tanto en el significado de la medida de Fisher como en el carácter de las relaciones de incerteza térmicas.

Palabras clave: *Teoría de probabilidades, Información cuántica, métodos semiclásicos*

We establish thermodynamic-like connections among i) the degree of phase-space delocalization, ii) Fisher's information measure, and iii) the canonical Shannon entropy for the one-dimensional thermal quantum harmonic oscillator (HO). This yields some new insights both into the meaning of the Fisher measure and into the character of thermal uncertainty relations.

Keywords: *Probability theory, Quantum information, Semi-classical methods*

PACS numbers: 03.67.-a, 05.30.-d, 05.40.-a

### I. INTRODUCCIÓN

Muchos trabajos se dedican actualmente a una variedad de aplicaciones físicas de la medida de información de Fisher ( $I$ ) (Véase, por ejemplo, [1–5]). Frieden y Soffer [1] han mostrado que la medida de información de Fisher provee de un poderoso principio variacional, que conduce a la mayoría de los Lagrangianos canónicos de la física teórica [1, 2]. Además,  $I$  provee una caracterización interesante de la “flecha del tiempo”, alternativa a la asociada a la entropía de Boltzman [6, 7]. También se puede replicar la estructura de transformada de Legendre de la termodinámica, sin cambios, si uno reemplaza la entropía de Boltzman-Gibbs-Shannon  $S$  por la medida de información de Fisher  $I$ , de modo tal que el uso de la medida de Fisher permite el desarrollo de una termodinámica que parece ser capaz de tratar situaciones de equilibrio y de no-equilibrio, de manera similar a la convencional [4]. Desentrañar las múltiples facetas de la información de Fisher y sus vinculaciones a la física es actualmente un tópico de amplio interés.

Continuando con un trabajo anterior [8] de dos de los autores, exploramos la termodinámica de la deslocalización en el espacio de las fases para una distribución de Husimi en el caso de un oscilador armónico, y su conexión con la medida de Fisher. Hasta donde sea posible, usaremos la notación de Anderson y Halliwell [9].

La formulación de la mecánica cuántica en el espacio de fases más elaborada, es la debida a Wigner [10]. A cada estado cuántico se le puede asignar una función en el espacio de las fases (la función de Wigner). En algunos casos esta función puede alcanzar valores

negativos, lo que la inhabilita para una interpretación probabilística. Esta particular limitación fue superada por Husimi [11]. La mecánica cuántica puede ser completamente reformulada en términos de las distribuciones de probabilidad de Husimi [12, 13]. En la presente comunicación enfocamos nuestra atención, siguiendo a Anderson y Halliwell [9], en la descripción térmica del oscilador armónico (OA) y su deslocalización en el espacio de las fases a medida que su temperatura crece.

En la sección II revisamos algunos aspectos fundamentales de la descripción del ensemble canónico del OA desde el punto de vista de los estados coherentes [9], y discutimos algunas ideas relacionadas con la medida de información de Fisher. En la sección III, exploramos sus propiedades termodinámicas con respecto a la deslocalización en el espacio de las fases. También revisamos las relaciones de incerteza térmicas. Finalmente trazamos algunas conclusiones en la sección IV.

### II. NOCIONES PRELIMINARES

#### Estados coherentes y distribución de Husimi

Anderson y Halliwell [9] analizan las distribuciones mecanocuánticas en el espacio de fases en términos de los estados coherentes  $|z\rangle$  del oscilador armónico, autoestados del operador  $\hat{a}$  [14, 15]

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2]; \quad \hat{a} = i(2\hbar\omega m)^{-1/2} \hat{p} + (m\omega/2\hbar)^{1/2} \hat{x}$$

$$2z = (x/\sigma_x + ip/\sigma_p)$$

$$\begin{aligned} z &= (m\omega/2\hbar)^{1/2}x + i(\hbar m\omega/2)^{-1/2}p \\ &\equiv x' + ip', \quad \text{con } x' = x/2\sigma_x; \quad p' = p/2\sigma_p \\ \sigma_x &= (\hbar/2m\omega)^{1/2}; \quad \sigma_p = (\hbar m\omega/2)^{1/2}; \quad \sigma_x\sigma_p = \hbar/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Las varianzas  $\sigma$  están evaluadas en el estado fundamental del OA. Los estados coherentes generan un espacio de Hilbert, constituyen una base sobre-completa y obedecen la regla de completitud [14]:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2z}{\pi} |z\rangle\langle z| &= \int \frac{dx dp}{2\pi\hbar} |x, p\rangle\langle x, p| = 1 \\ d^2z &= d\Re(z) d\Im(z) = \frac{dx dp}{2\hbar} \equiv dx' dp'. \end{aligned} \quad (2)$$

Una cantidad importante es  $\mu(x, p) = \langle z|\hat{\rho}|z\rangle$ , la función distribución “clásica” asociada a la matriz  $\hat{\rho}$  del sistema. La función  $\mu(x, p)$  se normaliza de la siguiente forma

$$\int \frac{dp dx}{2\pi\hbar} \mu(x, p) \equiv \int \frac{dx' dp'}{\pi} \mu(x', p') = 1, \quad (3)$$

y usualmente se la conoce como distribución de Husimi [11].

Tiene particular interés aquí discutir el caso de equilibrio, representado por la distribución canónica de Gibbs, donde la matriz densidad “térmica” está dada por

$$\hat{\rho} = Z^{-1} e^{-\beta\hat{H}}, \quad (4)$$

con  $Z = \text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}})$ , la función partición, y  $\beta = 1/k_B T$ , donde  $T$  es la temperatura y  $k_B$  es la constante de Boltzmann (que haremos igual a uno de aquí en adelante). Particularizando para el OA, con autoestados  $|n\rangle$  asociados a los autovalores de energía

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (5)$$

se tiene

$$\langle z|\hat{\rho}|z\rangle = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} |\langle z|n\rangle|^2 \quad (6)$$

con

$$|\langle z|n\rangle|^2 = \frac{|z|^{2n}}{n!} e^{-|z|^2}, \quad (7)$$

de modo que la distribución  $\mu$  queda [9]

$$\mu(x, p) = \langle z|\hat{\rho}|z\rangle = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) e^{-(1 - e^{-\beta\hbar\omega})|z|^2}. \quad (8)$$

Transcribimos a continuación, para referencias futuras, expresiones bien conocidas del OA para la entropía  $S$ , la energía media  $U$ , el calor específico  $C_V$ , y la función partición  $Z$  [16, 17]

$$\begin{aligned} S &= \beta \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} - \ln \{1 - e^{-\beta\hbar\omega}\} \\ U &= \left[ \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right] \equiv \frac{\hbar\omega}{2} + E \\ C_V &= -\beta^2 (\partial U / \partial \beta)_V = \left[ \frac{\hbar\omega\beta}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right]^2 e^{\beta\hbar\omega} \\ \ln Z &= -\beta \frac{\hbar\omega}{2} - \ln \{1 - e^{-\beta\hbar\omega}\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Esta importante medida de información fue la adelantada por R. A. Fisher en la década de los veinte del siglo pasado (Para un estudio detallado, véase [1, 2]). Consideremos un “escenario”  $\theta - \mathbf{x}$  en el que tenemos un sistema especificado por un parámetro físico  $\theta$ , mientras que  $\mathbf{x}$  es una variable estocástica ( $\mathbf{x} \in \Re^N$ ) y  $f_\theta(\mathbf{x})$ , la densidad de probabilidad para  $\mathbf{x}$  (que también depende de  $\theta$ ). Uno hace una medición de  $\mathbf{x}$  y tiene que hacer, con esta medida la mejor inferencia posible acerca de  $\theta$ . Llamamos a esa estimación  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\mathbf{x})$ . ¿Qué tan bien puede determinarse  $\theta$ ? La teoría de la estimación [18] establece que el mejor estimador posible  $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ , después de examinar un número muy grande de muestras  $\mathbf{x}$ , sufre un error medio cuadrático  $e^2$  de  $\theta$  que obedece una relación que involucra la  $I$  de Fisher,  $I e^2 = 1$ , donde la medida de información de Fisher es de la forma

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \int d\mathbf{x} f_\theta(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial \ln f_\theta(\mathbf{x})}{\partial \theta} \right\}^2, \quad \text{i.e.,} \\ I(\theta) &\equiv \left\langle \left\{ \frac{\partial \ln f_\theta(\mathbf{x})}{\partial \theta} \right\}^2 \right\rangle_f. \end{aligned} \quad (10)$$

Este “mejor” estimador es el llamado estimador *eficiente*. Cualquier otro estimador exhibe un error medio cuadrático mayor. Todos los estimadores deben ser insesgados, deben satisfacer  $\langle \hat{\theta}(\mathbf{x}) \rangle = \theta$ . La información de Fisher tiene una cota inferior: no importa cuál parámetro del sistema uno elija para medir,  $I$  debe ser mayor o igual que la inversa del error cuadrático medio asociado con el experimento. Este resultado,

$$I e^2 \geq 1, \quad (11)$$

es conocido como la cota de Cramer-Rao [2].

Un caso particular de gran importancia es el de las familias traslacionales [2, 3], o sea, funciones distribución cuya *forma* no cambie bajo desplazamientos en  $\theta$ . Estas funciones distribución son invariantes frente a corrimientos, y para ellas la información de Fisher adopta una forma más simple [2]

$$I(\text{invariante desplaz.}) = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial \ln f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\}^2. \quad (12)$$

La medida de Fisher es aditiva [2]: Si  $x$  and  $p$  son variables independientes  $I(x, p) = I(x) + I(p)$ . Note que para  $\theta \equiv \tau = (x, p)$  (un punto en el espacio de las fases), nos encontramos con una situación de invariancia por corrimiento. Puesto que al definir  $z$  en términos de las variables  $x$  y  $p$ , éstas están en unidades de sus respectivas desviaciones estándar, la medida de Fisher asociada con la distribución  $\mu(x, p) \equiv \mu(\tau)$ , será de la forma [3]

$$I_\tau = \int \frac{dp dx}{2\pi\hbar} \mu(p, x) \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} = \sigma_x^2 \left[ \frac{\partial \ln \mu(p, x)}{\partial x} \right]^2 + \sigma_p^2 \left[ \frac{\partial \ln \mu(p, x)}{\partial p} \right]^2 \quad (13)$$

Dada la expresión (8) para  $\mu$ ,  $I_\tau$  llega a ser

$$I_\tau = 1 - e^{-\beta \hbar \omega} \Rightarrow 0 \leq I_\tau \leq 1, \quad (14)$$

de lo que de inmediato se sigue que [8]  $I_\tau e^2_{|z|}(\beta, \omega) = 1$ , de modo que la medida de Fisher construida con la distribución de Husimi es la más adecuada para estimar la “posición en el espacio de fases”  $|z|$ . La estimación eficiente es posible para todas las temperaturas [8]. Finalmente, a partir de la ecuación (14) podemos reformular la expresión para  $\mu$ , (8) de una manera Gaussiana

$$\mu(z) = I_\tau e^{-I_\tau |z|^2}, \quad (15)$$

con el máximo en el origen. Vemos que  $I_\tau$  controla tanto la altura como la dispersión ( $\sim [2I_\tau]^{-1}$ ). Surge así una interpretación *original* de la medida de información de Fisher: el control de la localización. Note también que

$$\frac{dI_\tau}{dT} = \frac{dI_\tau}{d\beta} \frac{d\beta}{dT} = -\frac{\hbar \omega}{T^2} e^{-\beta \hbar \omega}, \quad (16)$$

de modo que la información de Fisher decrece exponencialmente a medida que crece la temperatura.

### III. DESLOCALIZACIÓN EN EL ESPACIO DE FASES

¿Cómo es que nuestra distribución Gaussiana pierde “localización” en el espacio de fases a medida que se inyecta energía y/o temperatura en nuestro sistema? En vista de las consideraciones anteriores, definimos, por conveniencia un factor de deslocalización en el espacio de fases,  $D$  como

$$\begin{aligned} D &= 1/I_\tau \Rightarrow 1 \leq D \leq \infty \\ \frac{d \ln D}{dT} &= \hbar \omega \beta^2 e^{-\beta \hbar \omega} D. \end{aligned} \quad (17)$$

Para la tasa de crecimiento de la energía de excitación con  $T$  (9), tenemos,

$$\frac{dE}{dT} = C_V. \quad (18)$$

Si volvemos a las ecuaciones (9) y miramos la expresión para la entropía, veremos que es posible reescribirla en la forma

$$\begin{aligned} S &= \beta E - \ln I_\tau = \beta E + \ln D \\ \frac{dS}{dT} &= -\beta^2 E + \beta C_V + \hbar \omega \beta^2 e^{-\beta \hbar \omega} D \\ &\equiv \beta \frac{dE}{dT} + \frac{d \ln D}{dT} - \beta^2 E, \end{aligned} \quad (19)$$

Aunque es tentador hacer la interpretación “macroscópica”

$$S \equiv S(E, D), \quad (20)$$

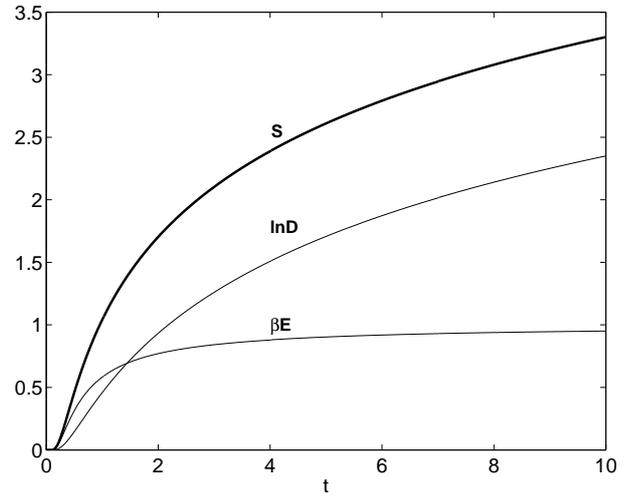


Figura 1:  $S$ ,  $\beta E$  y  $\ln D$ , en función del parámetro adimensional  $t = T/\hbar \omega$

el tercer término del lado derecho de (19) lo prohíbe, puesto que da cuenta de la “correlación”  $C = dS/dT - [\beta dE/dT + d \ln D/dT] \equiv -\beta^2 E$  entre las cantidades  $D$  y  $E$ , que no son realmente independientes: un incremento en  $S$  no es simplemente la suma de incrementos en  $D$  y  $E$ . De todos modos, de acuerdo a la primer línea de (19), la entropía es aportada de modo tal que parte de ella se origina en la energía de excitación, y la parte restante es aportada por la deslocalización en el espacio de fases. Note también que para  $\beta$  suficientemente pequeño, ( $T$  suficientemente alta), *términos de segundo orden* en  $\beta$  pueden despreciarse, en consecuencia,  $D$  y  $E$  llegan a “desacoplarse” y es válido (20). En tal caso, tiene sentido escribir

$$\beta = \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_D; \quad I_\tau = \left( \frac{\partial S}{\partial D} \right)_E, \quad (21)$$

lo que da otro significado a la medida de Fisher. La figura 1 muestra  $S$ ,  $\beta E$  y  $\ln D$ , en función del parámetro adimensional  $t = T/\hbar \omega$ .

#### Incertezas “térmicas”

Enfoquemos ahora nuestra atención en las variables reales del espacio de fases  $x, p$  (no  $x', p'$ ) y comencemos con los resultados obvios:  $\langle x \rangle_\mu = \langle p \rangle_\mu = 0$ . Se demuestra en [8] que

$$\begin{aligned} (\Delta_\mu x)^2 &= \langle x^2 \rangle_\mu = \int \frac{dp dx}{2\pi \hbar} x^2 \mu(x, p) = \frac{2 \sigma_x^2}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \\ (\Delta_\mu p)^2 &= \langle p^2 \rangle_\mu = \frac{2 \sigma_p^2}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}, \\ \Delta_\mu &\equiv \Delta_\mu x \Delta_\mu p = \frac{\hbar}{I_\tau} \Rightarrow I_\tau \Delta_\mu = \hbar. \end{aligned} \quad (22)$$

La “localización” en el espacio de fases es posible con las distribuciones de Husimi, sólo hasta  $\hbar$ . Esto debe compararse con las incertezas evaluadas de una marea puramente cuántica, sin usar las distribuciones de Husimi. Apelando al teorema del virial, [16] se puede afirmar fácilmente que [8]

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \frac{e^{\beta\hbar\omega} + 1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \Rightarrow \Delta_\mu = \frac{2 \Delta x \Delta p}{1 + e^{-\beta\hbar\omega}}. \quad (23)$$

Cuando  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $\Delta_\mu$  es dos veces el mínimo valor cuántico para  $\Delta x \Delta p$ , y  $\Delta_\mu \rightarrow \hbar$  la celda mínima en el espacio de fases. Los resultados cuántico y semiclásico coinciden a altas temperaturas. Finalmente, se verifica fácilmente [8] que las relaciones de incerteza de Heisenberg, adquieren el aspecto

$$F(\beta, \omega) = \Delta x \Delta p = \frac{1}{2} \left[ \Delta_\mu + \frac{E}{\omega} \right] = \frac{1}{2} \left[ \hbar D + \frac{E}{\omega} \right], \quad (24)$$

siendo gobernada por una función de incerteza térmica  $F$ , de modo que para  $T$  variando en  $[0, \infty]$ , el rango de valores posibles de  $\Delta x \Delta p$ , es  $[\hbar/2, \infty]$ . La ecuación (24) es una relación de incerteza térmica de “Heisenberg-Fisher” (para una discusión acerca del concepto de incerteza térmica, véase por ejemplo, [5, 20, 21]).  $F(\beta, \omega)$  crece tanto con  $E$  como con  $D$ . El resultado usual  $\hbar/2$  se alcanza para  $D$  mínimo, y para energía de excitación cero. Para  $dF/dT$ , a diferencia de lo que ocurre con  $dS$ , se puede establecer  $F \equiv F(E, D)$ , puesto que  $2dF = \hbar dD + \omega^{-1} dE$ . Se puede escribir entonces

$$\left( \frac{\partial F}{\partial D} \right)_E = \frac{\hbar}{2}; \quad \left( \frac{\partial F}{\partial E} \right)_D = \frac{1}{2\omega}, \quad (25)$$

dándole una apariencia termodinámica a la función de incerteza  $F$  que arroja nueva luz sobre el significado de  $\hbar$  y  $\omega$ . Los incrementos en  $dF$  de la función de incerteza térmica  $F$  son de dos tipos i) de la energía de excitación que aporta una contribución  $C_V/\omega$  y ii) del factor de deslocalización  $D$ .

## V. CONCLUSIONES

Nuestro estudio de la deslocalización térmica en el espacio de fases ha arrojado algunos resultados interesantes que pasamos a enumerar: hemos

- 1) provisto de una forma Fisher para la distribución de Husimi (Ecuación (15)),
- 2) conectado la dispersión de la distribución Gaussiana de Husimi con la medida de Fisher y definido una cantidad útil, el factor de deslocalización  $D$ ,
- 3) demostrado que la entropía  $S$  se puede expresar enteramente en términos de la energía de excitación  $E$  y del factor de deslocalización  $D$ ,
- 4) demostrado que para temperaturas suficientemente altas, las variables “macroscópicas” de las que depende la

entropía, son ciertamente  $E$ , y  $D$ ,

- 5) en ese régimen, la información de Fisher se comporta como un “calor específico” de deslocalización (Ecuación (21)),
  - 6) introducido una función incerteza  $F$  que se comporta como un potencial termodinámico y es una función de la energía de excitación  $E$  y del factor de deslocalización  $D$ ,
  - 7) La constante de Plank puede “leerse” como la derivada parcial de  $F$  con respecto a  $D$  a  $E$  constante. El crecimiento de la incerteza por unidad de deslocalización es justamente  $\hbar$
- Estos resultados están restringidos al oscilador armónico. Sin embargo, éste es un sistema tan importante, que constituye más que un mero ejemplo. Actualmente es de particular interés para la dinámica de átomos bosónicos y fermiónicos contenidos en trampas magnéticas [22–24], como así también para cualquier sistema que tenga niveles equidistantes en la vecindad del estado fundamental, como núcleos, o líquidos de Luttinger.

- 
- [1] B.R. Frieden and B.H. Soffer, *Phys. Rev. E* **52**, 2274 (1995).
  - [2] B.R. Frieden, *Physics from Fisher information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1998).
  - [3] F. Pennini, A.R. Plastino and A. Plastino, *Physica A* **258**, 446-457 (1998).
  - [4] B.R. Frieden, A. Plastino, A.R. Plastino and H. Soffer, *Physical Review E* **60**, 48 (1999)
  - [5] F. Pennini, A. Plastino, A.R. Plastino and M. Casas, *Physics Letters A* **302**, 156-162 (2002).
  - [6] A.R. Plastino and A. Plastino, *Phys. Rev. E* **54**, 4423 (1996).
  - [7] A. Plastino, A.R. Plastino, and H.G. Miller, *Phys. Lett. A* **238**, 129 (1997).
  - [8] F. Pennini and A. Plastino, *Phys. Rev. E* 2004 **69**, 057101 (2004)
  - [9] Arlen Anderson and Jonathan J. Halliwell, *Physical Review D* **48**, 2753 (1993).
  - [10] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
  - [11] K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* **22**, 264 (1940).
  - [12] R. F. O’Connell and E. P. Wigner, *Phys. Let. A* **85**, 121 (1981).
  - [13] S. S. Mizrahi, *Physica A* **127**, 241 (1984); *ibidem* **135**, 237 (1986); **150**, 541 (1988).
  - [14] J.R. Klauder and B.S. Skagerstam, *Coherent states* (World Scientific, Singapore, 1985).
  - [15] J. Schnack, *Europhys. Lett.* **45**(6), 647 (1999).
  - [16] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics* (Pergamon Press, Exeter, 1993).
  - [17] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, Franck Laloë, *Quantum Mechanics* (Hermann, Paris, France, 1977).
  - [18] H. Cramer, *Mathematical methods of statistics*, (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1946).
  - [19] A. Katz, *Principles of Statistical Mechanics, The information Theory Approach* (Freeman and Co., San Francisco, 1967).
  - [20] B. Mandelbrot, *Ann. Math. Stat.* **33**, 1021 (1962).
  - [21] F. Pennini and A. Plastino, *Physica A*, **334**, (2004) 132-

138.

[22] M.H. Anderson *et al.*, *Science* **269**, 198 (1995).

[23] K.B. Davis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).

[24] C.C. Bradley, C.A. Sackett, and R.G. Hulet,  
*Phys. Rev. Lett.* **78**, 985 (1997).