ISSN (EN LINEA): 1850 - 1158

Estrategias de búsqueda como proceso estocástico compuesto

Search strategies as a composite stochastic process

Carlos E. Budde y Miguel A. Ré

Facultad de Matemática, Astronomía y Física - Universidad Nacional de Córdoba
Ciudad Universitaria - (5000) - Córdoba - Argentina
e-mail: re@alerce.fis.uncor.edu

Existe evidencia experimental que sugiere que la estrategia de búsqueda de distintas especies animales está basada en dos fases diferenciadas que se alternan entre sí aleatoriamente: una fase de búsqueda en la que el animal hace una exploración local y es capaz de encontrar su presa y una fase de movimiento en la que no está en condiciones de visualizar la presa. La primera fase puede caracterizarse como un desplazamiento "lento" puramente difusivo, en tanto que en la segunda realiza un desplazamiento "rápido" sin efectuar exploración o búsqueda. Se estudia este problema en el marco de los procesos estocásticos compuestos, determinándose el tiempo medio para la detección de una presa y su dependencia con la densidad espacial de objetivos y las frecuencias de intercambio entre los estados. En este esquema alternante se encuentra un aumento del tiempo medio de atrapamiento para una distribución espacial homogénea de los blancos de búsqueda.

There is experimental evidence suggesting that search strategies followed by foraging animals is based in two different phases or displacement modes: a search phase, when the animal makes a local exploration and is able to find the target and a motion phase, with fast displacement but with the animal unable to find the target. The switch between the phases is assumed random. The search phase is modelled as a "slow" diffusive displacement, while in the motion phase we assume a "fast" displacement. This problem is stated as a composite stochastic process and the mean time for the target detection is calculated. It is found that in this alternating scheme the mean detection time increments when an homogeneuous spatial distribution of targets is assumed.

Pacs N^0 87.23.-n, 05.40.-a

1 Introducción

Existe un creciente interés en el estudio de modelos para procesos de reacción controlados por difusión debido a sus posibilidades de aplicación en la descripción de diversos fenómenos físicos, químicos y biológicos, como así también en las ciencias sociales y la ecología[1]. En particular la naturaleza de los procesos difusivos involucrados constituye un aspecto relevante en estos estudios[2]. En estos modelos de reacción la tasa de encuentro entre las partículas merece un estudio sistemático, pues determinará en última instancia la tasa global de reacciones, sobre todo a tiempos largos.

Los procesos de reacción mediados por difusión están encontrando aplicaciones en modelos biológicos cuantitativos. Entre estas aplicaciones mencionamos el problema general de determinar la mejor estrategia a adoptar en la búsqueda de objetivos ubicados aleatoriamente en el espacio. De hecho este problema es una de las tareas más frecuentes que deben enfrentar los organismos vivos a fin de obtener alimento, reproducirse o conseguir un refugio. En todos estos problemas el tiempo de búsqueda es un factor limitante por lo que su optimización es de importancia.

En una comunicación reciente[3] se ha propuesto una estrategia de búsqueda intermitente, combinando un estado de exploración local y un estado de desplazamiento o relocalización. Se cita como antecedente de esta propuesta estudios del comportamiento de alimentación de un amplio rango de especies animales, con una gran variación en la duración relativa de cada fase. La justificación planteada para el comportamiento intermitente se basa en que en situaciones en que los objetivos son difíciles de detectar y están distribuídos en forma dispersa, un movimiento rápido degradará las habilidades perceptivas del buscador, lo que obliga a efectuar una búsqueda lenta, que a su vez limita el área cubierta en la exploración. Se propone así la posibilidad de adoptar una estrategia de relocalización rápida que permita cambiar de posición a zonas inexploradas y volver a una búsqueda lenta.

El modelo puede plantearse esquemáticamente de la siguiente manera: el buscador asume alternativamente dos comportamientos distintos complementarios:

1) la fase de búsqueda o modo 1 que implica una búsqueda local modelada por un movimiento difusivo lento. El encuentro se produce cuando en su desplazamiento el buscador llega por primera vez a la posición del objetivo.

2) una fase de desplazamiento o modo 2, durante la cual el buscador se desplaza más rápidamente pero en la cual no puede detectar la presencia de los blancos.

El cambio de fase se supone regulado por un proceso probabilístico con una dinámica markoviana de primer orden con frecuencias de transición γ_1 (γ_2) para el cambio de la fase 1 (2) a la fase 2 (1). Los objetivos permanecen inmóviles y distribuídos aleatoriamente con una densidad uniforme. Los tiempos medio de permanencia resultan $1/\gamma_1$ y $1/\gamma_2$ para las fases 1 y 2 respectivamente. El comportamiento propuesto es sugerido por la gran variabilidad observada en los tiempos de permanencia en cada fase.

El mecanismo sensorial involucrado en el proceso de búsqueda no se incluye detalladamente en la descripción. Sin embargo se rescata el siguiente aspecto esencial: para objetivos parcialmente ocultos la detección puede obligar a un barrido cuidadoso. En este sentido la trayectoria difusiva no corresponderá necesariamente a la posición del buscador sino al punto de enfoque del sentido involucrado (visión, tacto u olfato).

Las trayectorias seguidas por las especies muestran una fuerte correlación por lo que el desplazamiento puede considerarse esencialmente unidimensional en ambas fases.

Sin embargo, como se observará en el desarrollo que sigue, este mecanismo alternante propuesto en[3], no parece optimizar las estrategias de búsqueda bajo la hipótesis asumida de homogeneidad espacial para la distribución de los objetivos de búsqueda. En esta comunicación analizamos el problema de la búsqueda intermitente o alternante en el esquema del proceso estocástico compuesto de van Kampen[4] con dos estados de desplazamiento. En este esquema el estado de búsqueda se asocia con un problema unidimensional de difusión en un dominio finito limitado por dos trampas perfectas (como por ejemplo en[5]). El estado de desplazamiento corresponde a su vez a un movimiento en un espacio unidimensional infinito libre de trampas. En la propuesta de[3] el desplazamiento se asocia a un movimiento balístico. El tiempo de encuentro del objetivo se corresponde en el esquema propuesto con el tiempo de atrapamiento o tiempo del primer pasaje por una trampa, debiendo el caminante estar en el estado de búsqueda.

2 El proceso estocástico compuesto

Presentamos en esta sección una descripción alternativa del proceso estocástico compuesto desarrollado por van Kampen y otros autores[4,6]. Consideremos una partícula que efectúa una caminata aleatoria de tiempo continuo (CTRW) en un espacio unidimensional, pudiendo encontrarse en uno de dos estados internos posibles. Distinguimos los estados internos del caminante por un índice i que toma los valores 1 o 2. Las transiciones entre estados internos se describen por las densidades de probabilidad para el tiempo de residencia en el estado i: $f_i(t)$, de manera tal que $f_i(t)\,dt$ es la probabilidad de que, habiendo alcanzado el estado interno i en $t=0$, el caminante abandone el estado i entre t y $t+dt$ cambiando al estado j ($\neq i$). Suponemos una dinámica de primer orden para las transiciones entre estados: $f_i(t)=\gamma_i\exp(-\gamma_i t)$ con $1/\gamma_i$ el tiempo medio de permanencia en el estado i. A partir de estas funciones calculamos la probabilidad de permanencia en el estado i: $\phi_i(t)=\exp(-\gamma_i t)$. Los cambios de estado interno del caminante están asociados a una modificación de sus propiedades de desplazamiento. Para cada estado interno i, describimos el desplazamiento del caminante por $\xi_i\left(s,s';t\right)$: la probabilidad de encontrarlo en la posición s al tiempo t dado que comenzó su desplazamiento en s' en $t=0$ sin cambiar de estado interno. En el caso del espacio continuo la probabilidad para el desplazamiento estará dada por $\xi_i\left(s,s';t\right)ds$.

El proceso de cambio de estado resulta así un proceso estocástico autónomo regulado por las funciones $f_i(t)$, independiente del proceso de desplazamiento $\xi_i\left(s,s';t\right)$. Por el contrario el proceso de desplazamiento dependerá del estado interno del caminante. Al proceso conjunto para la posición y el estado interno lo denominamos proceso estocástico compuesto y estará descripto por $P_i(s;t)$: la probabilidad de encontrar al caminante en la posición s con estado interno i al tiempo t. Para expresar esta magnitud en términos de $f_i(t)$ y $\xi_i\left(s,s';t\right)$, definimos la matriz de transiciones

$$H_{ij}\left(s,s';t\right)=\begin{cases}0 & i=j\\ f_j(t)\,\xi_j\left(s,s';t\right) & i\neq j\end{cases}\qquad(1)$$

donde $H_{ij}\left(s,s';t\right)dt$ es la probabilidad de que se produzca la transición $j\to i$ con el caminante en s luego de transcurrido un tiempo entre t y $t+dt$ desde que llegó al estado j estando en la posición s'. Notamos que estamos teniendo en cuenta los instantes para las transiciones entre estados internos, en tanto que la posición se considera en forma parámetrica. Expresado alternativamente $H_{ij}\left(s,s';t\right)$ es la densidad de probabilidad para los tiempos de permanencia en el estado j. Definimos ahora la densidad de probabilidad $R_i(s;t)$ de forma tal que $R_i(s,t)\,dt$ es la probabilidad de que el caminante haga una transición al estado interno i mientras ocupa la posición s, entre t y $t+dt$. La densidad $R_i(s;t)$ debe satisfacer la relación de recurrencia

$$R_i(s;t) = \sum_{s_0,j} H_{ij}(s,s_0;t)\, P_0(s_0)\, g_j + \\ + \sum_{j,s'} \int_0^t dt'\, H_{ij}\left(s,s';t\right) R_j\left(s';t'\right) \quad (2)$$

con $P_0(s_0)$ la distribución de probabilidad para la posición inicial del caminante y g_j la distribución inicial en estados internos. La relación de recurrencia (2) refleja la siguiente condición: el caminante habrá llegado al estado j en la transición anterior en un instante $t' < t$ y, luego de transcurrido un tiempo $t - t'$ efectúa la transición $j \to i$. Deben considerarse además aquellas realizaciones en las que el caminante pasa al estado i en la primer transición luego de $t = 0$, cuya contribución está dada por el primer término en el segundo miembro. Definimos las transformadas de Fourier por

$$\begin{aligned} \hat{R}_i(k;t) &= \sum_s e^{iks} R_i(s;t) \\ \hat{H}_{ij}(k;t) &= \sum_s e^{ik\left(s-s'\right)} H_{ij}\left(s,s';t\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Para el caso del espacio continuo las sumas deberán sustituirse por integrales. Denotamos además la transformada de Laplace de una función del tiempo $g(t)$, mediante la sustitución $t \to u$: $g(u) = \int_0^\infty dt\, \exp(-ut)\, g()$. Tomando la transormada de Fourier espacial y de Laplace temporal en la ecuación (2) obtenemos la solución

$$\hat{R}_i(k;u) = \sum_{j,l} \left[I - \hat{H}(k;u)\right]^{-1}_{ij} \hat{H}_{jl}(k;u)\, \hat{P}_0(k)\, g_l \quad (4)$$

con I la matriz identidad en el espacio de estados internos. A partir de la densidad $R_i(s;t)$ obtenemos la expresión para $P_i(s;t)$

$$P_i(s;t) = \sum_{s_0} \xi_i(s,s_0;t)\, \phi_i(t)\, P_0(s_0)\, g_i + \\ + \sum_{s'} \int_0^t dt'\, \xi_i\left(s,s';t-t'\right) \phi_i\left(t-t'\right) R_i\left(s';t'\right) \quad (5)$$

Señalamos que en las expresiones anteriores hemos usado la suposición de dinámica markoviana para los cambios de estado. El segundo término expresa la condición siguiente: para encontrar al caminante en la posición s con estado i en un tiempo t éste habrá hecho una transición al estado i en un tiempo anterior t' en alguna posición s', desplazándose luego hasta s mientras mantiene el estado i. El primer término suma la contribución de aquellas realizaciones que comienzan con estado interno i y no efectúan transición alguna, desplazándose de la posición inicial s_0 a la posición s manteniendo el estado i. Pasando a la representación de Fourier y Laplace obtenemos la probabilidad para el proceso conjunto

$$\hat{P}_i(k;u) = \hat{\xi}_i(k;u+\gamma_i) \sum_j \left[I - \hat{H}(k;u)\right]^{-1}_{ij} g_j \hat{P}_0(k) \quad (6)$$

Notamos además que los elementos no nulos de la matriz $\hat{H}_{ij}(k;u)$ resultan

$$\hat{H}_{ij}(k;u) = \gamma_j \hat{\xi}_j(k;u+\gamma_j) \quad (7)$$

en la representación de Fourier y Laplace, teniendo en cuenta la forma explícita asumida para las densidades $f_j(t) = \gamma_j \exp(-\gamma_j t)$.

3 El proceso de búsqueda

Consideremos ahora el problema particular planteado en la introducción, correspondiente a la estrategia de búsqueda alternante o itermitente. Al encuentro de un objetivo lo asociamos con el atrapamiento del caminante. En el estado de movimiento (estado 2) no hay posibilidad de atrapamiento (los objetivos de búsqueda están inaccesibles o equivalentemente las trampas permanecen inactivas), por lo que deberá cumplirse $\sum_s \xi_2\left(s,s';t\right) = \hat{\xi}_2(k=0;t) = 1\, \forall t$ ya que mientras el caminante no cambie de estado no puede ser atrapado y estará con certeza en alguna posición del espacio. Tomando transformada de Laplace y usando la condición de normalización encontramos

$$\hat{\xi}_2(k=0;u) = \frac{1}{u} \quad (8)$$

En el estado 1, el estado de búsqueda (con los objetivos de búsqueda accesibles o equivalentemente con las trampas activas), el caminante se desplazará entre dos trampas o blancos ubicados a derecha y a izquierda a las distancias d_d y d_i respectivamente. En este caso no habrá conservación de la probabilidad, dada la posibilidad de atrapamiento o encuentro y el consiguiente flujo de probabilidad hacia las trampas. En este caso

$$\sum_s \xi_1\left(s,s';t\right) = S_1(t \mid d_d, d_i) \quad (9)$$

es la probabilidad de supervivencia en el estado 1. Notamos que hasta aquí no hemos hecho suposiciones particulares acerca de las propiedades de desplazamiento en los distinos estados internos. Definimos ahora la densidad de probabilidad de absorción en el estado 1 como $A_1(t \mid d_d, d_i)$, donde $A_1(t \mid d_d, d_i)\, dt$ es la probabilidad de que la partícula sea absorbida entre t y $t + dt$. Esta densidad está relacionada con $S_1(t \mid d_d, d_i)$ por la ecuación

$$S_1(t \mid d_d, d_i) = 1 - \int_0^t dt'\, A_1\left(t' \mid d_d, d_i\right) \quad (10)$$

El tiempo medio de atrapamiento en el estado 1 puede calcularse de

$$\langle t \rangle_1 = \int_0^\infty dt\, S_1(t) = S_1(u=0) \quad (11)$$

Consideramos ahora el proceso estocástico compuesto. La probabilidad de supervivencia del caminante será

$$S(t) = \sum_{s,i} P_i(s;t) \tag{12}$$

y, a partir de la transformada de Laplace de esta expresión obtenemos el tiempo medio de atrapamiento

$$\langle t \rangle = S(u=0) \tag{13}$$

Sustituyendo los resultados (8) y (10) promediando sobre los valores de d_d y d_i en (6) evaluada en $k=0$ y sustituyendo ésta a su vez en (13) obtenemos finalmente

$$\langle t \rangle = \frac{1}{A_1(u=\gamma_1)}\left[\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right] - \left[\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_1+\gamma_2}\right] \tag{14}$$

De particular interés resultará el límite de γ_1 pequeño: $\gamma_1^{-1} \gg \langle t \rangle_1$ correspondiente a un tiempo medio de residencia en el estado 1 mucho mayor que el tiempo medio de atrapamiento en dicho estado y $\gamma_1 \ll \gamma_2$ correspondiente a una permanencia mayor, en promedio, en el estado 1 que en el estado 2. Usamos además la aproximación $A_1(u) \simeq 1 - u\langle t \rangle_1$ para valores pequeños de u con lo que obtenemos

$$\langle t \rangle \simeq \frac{\gamma_1}{\gamma_2^2} + \langle t \rangle_1 \tag{15}$$

Vemos así que las excursiones al estado 2 o de movimiento sólo retrasan, en promedio, el tiempo de encuentro del blanco (atrapamiento de la partícula).

4 Conclusiones

Hemos presentado aquí un tratamiento alternativo para el cálculo del tiempo medio de encuentro en la estrategia de búsqueda intermitente. El cálculo se ha basado en una adaptación del esquema del proceso estocástico compuesto para un proceso de atrapamiento con activación. La activación de las trampas está aparejada a un cambio en las propiedades de desplazamiento del caminante. El principal resultado obtenido es que, bajo la hipótesis asumida de homogeneidad espacial en la distribución de objetivos, el tiempo medio de encuentro del objetivo crece con esta estrategia de búsqueda comparado con el tiempo medio en la fase 1, es decir que en promedio las excursiones a la fase 2 retrasan el encuentro del objetivo. En el cálculo se ha supuesto una densidad espacial uniforme para la distribución de objetivos, que pensamos es determinante del resultado, a partir del siguiente razonamiento: la homogeneidad espacial en la distribución de objetivos significa que cada vez que el buscador entra en la fase 1 encuentra el mismo entorno independientemente de la distancia que se haya desplazado desde la última etapa de búsqueda, debiendo comenzar nuevamente con este proceso. De esta manera podemos concluir que las incursiones a la fase 2 constituyen sólo una demora para distribuciones uniformes de objetivos. Esta conclusión es coincidente con resultados obtenidos en el problema de atrapamiento dinámico[7], donde la inhabilitación de la trampa demora, en promedio, el proceso de atrapamiento. Quedan por explorar situaciones con inhomogeneidad espacial y el trabajo en esta línea será pronto publicado.

Agradecimientos: Los autores agradecen el financiamiento de Agencia Córdoba Ciencia y SeCyT-UNC para este proyecto.

Referencias

[1] M Marro y R. Dickman, "Nonequilibrium phase transitions in lattice models", Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[2] F. Bartumeus, J. Catalan, U. L. Fulco, M. L. Lyra y G. M. Viswanathan, "Optimizing the Encounter Rate in Biological Interactions: Lévy versus Brownian Strategies", Phys. Rev. Lett. **88**, 097901 (2002).

[3] O. Bénichou, M. Coppey, M. Moreau, P-H Suet y R. Voituriez, "Optimal Search Strategies for Hidden Targets", Phys. Rev. Lett. **94**, 198101 (2005).

[4] N. G. Van Kampen, "Composite Stochastic Processes", Physica A **96**, 435 (1979).

[5] C. A. Condat y D. P. Prato, "Displacement moments in the trapping model with a field", Phys. Lett. A **180**, 388 (1993).
D. P. Prato, H. Matsuda y C. A. Condat, "Mean displacement moments and survival times in the trapping model with strong fields", Phys. Lett. A **240**, 322 (1998).

[6] H. L. Friedman y A. Ben-Naim, "Calculation of the Effect of Non-Brownian Motion on Some dc Trasport Coefficients in Solution", J. Chem. Phys. **48**, 120 (1968).

[7] C. E. Budde, M. O. Cáceres y M. A. Ré, "Transient Behaviour in the Absorption Probability Distribution in the Presence of a Non-Markovian Dynamic Trap", Europhys. Lett. **32,** 205 (1995).
M. O. Cáceres, C. E. Budde y M. A. Ré, "Theory of the Absorption Probability Density of Diffusing Particles in the Presence of a Dynamic Trap", Phys. Rev. E **52,** 3462 (1995).
M. A. Ré, C. E. Budde y M. O. Cáceres, "Survival Probability in the Presence of a Dynamic Trap", Phys. Rev. E **54**, 4427 (1996).