AUTOVALORES COMPLEJOS EN MECANICA CUANTICA

Mario A. Castagnino*

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 1428 Buenos Aires Instituto de Astronomía y Física del Espacio, CC67, Sucursal 28, 1428 Buenos Aires

Fabián H. Gaioli[+]

Departamento de Física, Facultad de Ciencias exactas y Naturales, Universidad ed Buenos Aires, 1428 Buenos Aires.

En este trabajo se estudia la posibilidad de una descripción mecanoautomática de estados asociados con autovalores complejos del operador Hamiltoniano. Utilizando la teoria cuántica de espacios de Hilbert equipados, proponemos una precisa formulación matemática para el problema del decaimiento de una partícula inestable.
Comparamos y discutimos brevemente nuestros resultados con los obtenidos por otros métodos. En particular, para el modelo de Friedrichs, obtenemos el marco adecuado para interpretar algunos de los resultados obtenidos por la escuela de Bruselas (Prigogine y colaboradores) en el caso de la termodinámica de los procesos irreversibles.

I. INTRODUCCION

Los autovalores complejos del operador energía H fueron introducidos de manera fenomenológica para descubrir el decaimiento alfa.[1] Con tales valores los correspondientes autovectores de H son estados que decaen exponencialmente (vectores de Gamow). A pesar de la utilidad de tales vectores en la descripción de los fenómenos de decaimiento, los mismos fueron olvidados en la mayoria de los textos de Mecánica Cuántica por las dificultades de interpretación que involucran. Como es bien sabido, dentro del marco usual de la Mecánica Cuántica los observables físicos, como la energía, correspondan a operadores hermíticos que actuan sobre vectores del espacio de Hilbert complejo y separable de funciones de cuadrado integrable. Para tales operadores es fácil demosrtar que sólo pueden tener autovalores reales. Es principalmente este hecho el que induce a la descripción de los estados que decaen como provenientes de resonancias usando la distribución de energía de Breit-Wigner[2] o como polos de la matriz S,[3] correspondiendo los mismos a una aproximación dentro de un intervalo comprendido entre muy cortos y muy largos tiempos, en lugar de utilizar vectores (como los de Gamow) para tal fin. El criterio por el cual el decaimiento exponencial no puede ser perfectamente válido en la teoría usual considera al sistema preparado para un estado inestable $|\psi>$ el cual decaerá en el transcurso del tiempo.[4] El Hamiltoniano es dado por

$$H=H_o+V, \tag{1.1}$$

donde el estado $|\psi>$ es estable bajo la acción de H_o y la perturbación V es la responsable del decaimiento. La probabilidad de permanencia en tal estado después de transcurrido un tiempo t es

$$P(t) \ = \ |<\psi|e^{-iHt}\ \psi>|^2. \tag{1.2}$$

H es un operador hermítico generador de la evolución temporal del sistema que para $t \rightarrow 0$ satisface

$$e^{-iHt} \simeq 1 - iHt,$$

con lo cual

$$P(t) \simeq 1 + O(t^2), \tag{1.3}$$

en lugar de $1\text{-}\lambda t$. Vemos entonces que, para cortos tiempos tenemos una violación de la ley puramente exponencial. Dentro de este rango de tiempo la teoría predice una secuencia de mediciones realizadas sobre el sistema inestable con una fecuencia muy rápida inhibe el decaimiento. Este resultado se conoce como la paradoja de Xenón en Mecánica Cuántica.[5] Para muy largos tiempos, que eventualmente pueden llegar a ser tan grandes como la edad del Universo, lo cual hace muy difícil la contrastación experimental, el apartamiento de la ley exponencial es tal que permite restaurar el estado inicial (grandes colas). Estos comportamientos[6] están íntimamente relacionados con la

*Prof. Titular, U.B.A., Investigador Principal, CONICET.
+ Becario, U.B.A.

pretensión de describir fenómenos típicamente irreversibles y deterministas con una teoría que, como es bien conocido, es adecuada para la descripción de los fenómenos reversibles.

Sin embargo, una estructura matemática introducida por Gel'fand,[7] conocida como espacios de Hilbert equipados o tripletes de Gel'fand, permite dar una caracterización funcional correcta para los vectores de Gamow así tambien como para los vectores correspondientes al espectro continuo ya que los mismos no tienen una relación con funciones de cuadrado integrable. De esta manera los operadores admiten una extensión autoadjunta tal que sus autovectores pueden corresponder a distribuciones temperadas que forman un conjunto ortonormal y completo. Veremos como utilizar este formalismo para la descripción de un proceso de decaimiento en un caso particular, el modelo de Friedrichs.[8] Otros modelos han sido propuestos para mostrar les ventajas de la descripción de los estados que decaen utilizando vectores en los espacios de Hilbert equipados.[9-15]

Una cuestión relacionada con el decaimiento de sistemas inestables es la introducción de una dirección privilegiada del tiempo dado que se produce una ruptura de la simetría ante inversión temporal. Al final de este trabajo analizaremos algunas cuestiones relacionadas con la flecha del tiempo, para lo cual será nesesario aclarar qué se entiende por flecha de tiempo. Pese a que intuitivamente este concepto es por todos comprendido, quizá como consecuencia de lo que algunos llaman flecha del tiempo psicológica, no es obvio que todos los autores al referirse a distintas flechas del tiempo que aparecen en distintos capítulos de la Física, se estén refiriendo al mismo tipo de flecha. Si por flecha del tiempo entendemos la posibilidad de distinguir de una manera correcta la existencia de un pasado y un futuro, aunque más no sea una distinción convencional, entonces es suficiente contar con la presencia de un sistema físico que evolucione según una ley no simétrica. Es decir, supongamos que contamos con una partícula clásica en movimiento monótono y no periódico, entonces podemos caracterizar la distinción entre pasado y futuro según la sucesión de estados que tiene la partícula parametrizados en el tiempo. Sin embargo, la ley física que gobierna el movimiento de la partícula es invariante ante inversión temporal y por lo tanto no podemos hablar de una diferencia sustancial entre pasado y futuro, es decir, se admite que, así como hay partículas que evolucionan en un sentido también hay particulas que lo hacen en sentido contrario con igual probabilidad y por lo tanto la inversión del movimiento parece tan natural como el movimiento original. La mayoría de las leyes físicas fueron construidas compatibles con este criterio.

Un ejemplo frecuentemente citado de flecha del tiempo es la flecha del tiempo electromagnética ya que la descripción de fenómenos electromagnéticos utiliza soluciones con potenciales retardados en lugar de avanzados, lo cual evidentemente es debido a la elección particular de las condiciones de contorno. Otro ejemplo es el de la flecha de tiempo cosmológica la cual señala la dirección de expansión del Universo. Una flecha puede ser introducida a nivel de la ecuación de Lioville, considerando, por ejemplo, la evolución de la parte diagonal de la matriz densidad (la que no tiene correlaciones), ya que partiendo de una condición inicial descorrelacionada, en el transcurso del tiempo la información contenida en la diagonal será menor, pues parte de la información original es repartida en los elementos no diagonales. Ahora bien, las ecuaciones que gobiernan la evolución de todos estos fenómenos son invariantes ante la transformación de inversión temporal, lo cual no es más que una consecuencia de la posibilidad en principio de utilizar como condiciones iniciales los inversos temporales de los estados finales. Es decir, debemos de alguna manera evitar tal posibilidad para transformar la asimetría temporal en una propiedad **sustancial**.

Por ejemplo, para el caso electromagnético la cuestión se traslada a la pregunta de porqué son más favorables las condiciones de contorno que privilegian el uso de potenciales retardados respecto de los avanzados (condiciones de causalidad). En este caso se produce una ruptura de la simetría ante inversión temporal pues la mitad de los estados originalmente accesibles (aquellos descriptos por potenciales avanzados) está prohibida. Algunas veces se formula el problema con la pregunta de como es posible que a partir de leyes microfísicas supuestas reversibles se obtenga una macrofísica cuya evolución se observa irreversible en la mayoría de los fenómenos físicos, como es la descripción aportada por el segundo principio de la Termodinámica. En este caso la flecha del tiempo parece más una cuestión relacionada con un efecto promediado de los fenómenos microfísicos asociada con diferentes probabilidades entre los estados iniciales y finales. Así por ejemplo, la disolución de un terrón de azúcar en el café, parece más adecuarse a la anterior descripción ya que el proceso de rearmado de un terrón es prácticamente imposible de lograr sin la acción conspirativa de la naturaleza. En este caso parece privilegiada la evalución en un sentido del tiempo respecto al otro, ya que si pasaramos un film invertido de la disolución del terrón de azúcar, éste nos parecería antinatural. Sin embargo, algunos autores consideran esta posibilidad como una propiedad subjetiva, dependiente del grado de precisión del observador. Una filosofía compatible con la descripción de la segunda ley de la Termodinámica como fruto de la introducción de elementos probabilísticos dentro de la teoría ha sido realizada por numerosos autores.[16] En particular, el *granulado grueso* de Nakajima[17] y Zwanzig[18] es una de las más populares. El formalismo utiliza una proyección de la matriz densidad de sistema sobre los estados macroscópicamente accecibles, pero la misma es arbitraria ya que el concepto de *relevancia* no queda unívocamente definido. Por medio de una aproximación se llega a una ecuación maestra generalizada. No dicutiremos aquí los detalles de este formalismo, simplemente señalemos que la solución obteniodagenera una ecuación irreversible de algún modo está indicando la pocisión privilegiada de ciertos estados dinámicos por el grado de probabilidad macroscópica de existencia de los mismos, a través del concepto de relevancia asumido en cada caso particular.

En resumen, hay diferentes versiones de lo que se entiende por flecha de tiempo. Aquí no hemos enumerado la larga lista de fenómenos que revelan una dirección privilegiada del tiempo, sino tan sólo señalamos que la misma puede entenderse como una propiedad originada en una elección meramente **convencional** o como consecuencia de una diferencia **sustancial** dentro de las mismas leyes de la Física, ya sea en forma aproximada o no.

El modelo que presentaremos intenta mostrar una alternativa para la aparente *paradoja* de cómo derivar leyes macroscópicas irreversibles a partir de leyes microscópicas reversibles. Para ello analizamos la posibilidad de construir una ley de evolución a partir de la resolución exacta de un sistema modelo (que de todos modos presenta gran generalidad). Nos restringiremos a un sistema cuántico pero el formalismo presentado posee la virtud de permitir su aplicación a sistemas clásicos caóticos,[19,20] lo cual evidentemente muestra la utilidad del mismo para el tratamiento de fenómenos en contextos diferentes.

El modelo pues, sin entrar en el detalle de los calculos realizados, corresponde al decaimiento de un sistema inestable por la acción de una perturbación que acopla los estados del espectro directo (estados relevantes de nuestra descripción) con los estados del continuo (modelo de Friedrichs[8]). Veremos que la ruptura de la simetría ante la inversión temporal se debe a un desdoblamiento de los estados dinámicos pertenecientes a diferentes espacios de Hilbert equipados con la selección del semigrupo compatible con nuestras observaciones. De esta manera obtenemos un marco matemático adecuado para describir la aparición de una flecha del tiempo a nivel fundamental. En las siguientes secciones presentamos una somera descripción de los espacios de Hilbert equipados (sección 2), los resultados principales obtenidos con el Hamiltoniano de Friedrichs (sección 3), la obtención de variables de Lyapunov (sección 4) y las conclusiones del trabajo (sección 5). No haremos una exposición detallada, dejando para tal fin una larga lista de referencias, sólo tratamos de motivar la importancia de una descripción en la cual aparecen naturalmente los autovalores complejos del Hamiltoniano. Con tal las partículas inestables pueden ser consideradas en pie de igualdad con las estables, ambas pueden ser representadas por vectores generalizados dentro del marco de la Mecánca Cuántica. El estudio de tales sistemas es la base para la composición de la flecha del tiempo largamente estudiada por la escuela de Bruselas[21].

II. LOS ESPACIOS DE HILBERT EQUIPADOS.

Sea Φ un espacio lineal complejo. Una funcional F sobre Φ mapea el espacio Φ en los númros complejos C.

$$F\colon \Phi \to C. \tag{2.1}$$

Si F satisfece

$$F(\alpha\phi+\beta\psi) = \alpha^* F(\phi)+\beta^* F(\psi), \tag{2.2}$$

F es una funcional antilineal. Un ejemplo de este tipo es el producto escalar

$$F(\phi)=(\phi,\psi)=\int \phi^*(x)\psi(x)dx, \ \forall\psi \in \Phi.$$

Es fácil probar que dos funcionales F_1 y F_2, $\alpha F_1 + \beta F_2$, donde α,β son dos números complejos arbitrarios, es también una funcional antilineal. De aquí el conjunto de funcionales antilineales sobre un espacio lineal Φ forma un espacio lineal. Este spacio se denomina el espacio lineal o conjugado de Φ y lo denotaremos por Φ^x. Para esacios lineales de dimensión finita puede establecerse una relación uno a uno entre funcionales de Φ^x y vectores de Φ. En tal caso,

$\Phi^x = \Phi$. Para espacios de dimensión infinita dicha correspondencia no es posible y se tiene, en general, la relación $\Phi^x \supset \Phi$. Se hace nesesario introducir una noción de topología para comprender estas propiedades.

En el espacio de Hilbert ordinario $\mathcal{H}$ se define la convergencia de una serie de vectores $\phi_1,\ldots,\phi_\nu,\ldots$ a un vector $\phi \in \mathcal{H}$ requiriendo $\|\phi_\nu - \phi\| \to 0$ para $\nu \to \infty$. Sin embargo, tal noción de convergencia puede ser restringida aún más pidiendo, por ejemplo,

$$\|A^p(\phi_\nu - \phi)\| \to 0,$$

para $\nu \to \infty$ y para todo valor entero de p, donde A es cualquier operador lineal que actúa sobre los vectores de Φ. Esta convergencia está bien definida si $\|A^p\phi\| < \infty$ Por ejemplo, la convergencia se verifica para todas las potencias del operador impulso **p** (derivadas de ϕ en la representación de coordenadas) y las del operador posición **x**, lo cual asegura que todos los valores de expectación estén bien definidos (por ejemplo los vectores de ϕ deben pertenecer a la clase de Schwartz de funciones infinitamente diferenciables que convergen a cero en infinito más rápido que cualquier polinomio). Para $p = 0$ la convergencia definida en Φ implica la convergencia definida en $\mathcal{H}$. Por lo tanto, $\phi \subset \mathcal{H}$ ya que tenemos más vectores que converjan en norma que los que lo hacen para todas sus derivadas (como en el ejemplo del operador **p**). En particular el espacio $\mathcal{H}$ verifica, debido a la correspondencia uno a uno con las funcionales antilineales, $\mathcal{H}=\mathcal{H}^x$. Sin embargo, las funcionales pertenecientes al espacio Φ^x son más numerosas que las pertenecientes a $\mathcal{H}^x$, con lo cual, tenemos el siguiente **triplete de Gel'fand[7] o espacio de Hilbert equipado**:

$$\Phi \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}^x \subset \Phi^x. \qquad (2.3)$$

Veamos como los autovectores generalizados que aparecerán en la descomposición espectral del operador Hamiltoniano para el modelo de Friedrichs (ver la sección siguiente) pueden pensarse como vectores en el espacio de Hilbert equipado. Para cada operador A que actua en el espacio Φ existe un operador A^x que actúa sobre vectores generalizados de Φ^x (funcionales antilineales continuas), tal que

$$<\phi|A^x|F> = <A\phi|F>, \qquad (2.4)$$

que puede pensarse como una generalización de la relación válida en Hilbert

$$(\phi, A^\dagger\psi) = (A\phi, \psi),$$

donde F es una funcional antilineal de Φ^x y hemos definido la notación

$$F(\phi) = <\phi|F>. \qquad (2.5)$$

F será un autovector generalizado de A con autovalor ω si y sólo si

$$<A\phi|F> = \omega <\phi|F>, \ \forall\phi \in \Phi, \qquad (2.6)$$

donde, si ponemos $|F> = |\omega>$ podemos escribir la relación anterior como

$$A^x|\omega> = \omega|\omega>. \qquad (2.7)$$

En el sentido generalizado antes expuesto es que los autovectores de los operadores posición **x** e impulso **p** adquieren un adecuado marco matemático para su descripción en la Mecánica Cuántica debido a la topología más fuerte del espacio Φ. El dual topológico Φ^x contiene pues, las distribuciones que corresponden a vectores generalizados del espacio Φ^x. Del mismoo modo son posibles, eligiendo funciones comportadas en el espacio de prueba Φ tal que aseguren la convergencia de los vectores de Φ y quede bien definido (2.5), autovectores generalizados correspondientes a autovalores complejos, como será el caso que describiremos a continuación.

III. El MODELO DE FRIEDRICHS.

El modelo de Friedrichs[8] consiste en un estado discreto $|1>$ acoplado continuo de estados $|\omega>$, $\omega \in [0,\infty)$, cuyo Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H = H_0 + \lambda V = \omega_1|1><1| + \\ + \int_0^\infty d\omega\omega|\omega><\omega| + \lambda\int_0^\infty d\omega V_\omega(|\omega><1| + \\ + |1><\omega|). \end{aligned} \qquad (3.1)$$

El espectro del Hamiltoniano no perturbado H_0 consisite de una parte continua $[0,\infty]$ y un autovalor puntual ω_1 incluído en el continuo. La perturbación λV origina transiciones entre el autovalor discreto y el continuo. En particular, para el proceso de decaimiento la preparación del estado instable no es considerada, o lo que es lo mismo, se analizará el decaimiento a partir de un momento en que la perturbación ya está presente.

Sin entrar en los detalles de cálculo mencionemos las característocas principales que llevan al preoceso de diagonalización del Hamiltoniano. Los autovectores generalizados obtenidos dependen de los valores que anulan la siguiente función

$$\alpha(z) = z - \omega_1 - \lambda^2 \int_0^{\infty} d\omega \, \frac{V_\omega^2}{z - \omega}, \qquad (3.2)$$

(los ceros de $\alpha(z)$ corresponden a los autovalores discretos de H,

$$< 1|\frac{1}{\mathrm{z} - \mathrm{H}}|1 > \equiv \frac{1}{\alpha(z)},$$

donde el operador $1/(z\text{-}H)$ es la resolvente del Hamiltoniano).

-Si $\alpha(z) \neq 0$ entonces el espectro continuo forma una base completa de autovectores generalizados y el discreto desaparece de la descomposición espectral del operador Hamiltoniano H^x.

-Si $\alpha(z) = 0$ para algún valor real de z (el cual debe ser negativo), entonces en la descomposición espectral aparece el discreto, pero este valor no converge a ω_1 en el límite en que la perturbación se anula.

-Si $\alpha(z) = 0$ tiene una solución compleja, la misma representa el autovalor complejo generalizado que recupera el espectro descreto el cual es analítico en el parámetro de la perturbación λ.

En el último caso, es nesesaria una extención analítica de la función $[\alpha(z)]^{-1}$ que tiene una continuación meromorfa en el semiplano complejo inferior pero que encuentra un polo en la segunda hoja de Riemann.[9] La extensión analítica de $\alpha(z)$ se obtiene[15] deformando el contorno de integración de modo tal que éste encierre el polo de la función $\alpha(z)^{-1}$.

Bajo estas condiciones el proceso de diagonalización lleva al siguiente Hamiltoniano H^x.

$$H^x = z_0|1^- >< 1^+| + \int_0^{\infty} d\omega\omega|\omega^- >< \omega^+|, \qquad (3.3)$$

donde + y - denotan los autovectores a izquierda y derecha de H^x, respectivamente, es decir,

$$\begin{aligned} H^x|1^- > &= z_0|1^- >, \qquad H^x|\omega^- > = \omega|\omega^- >, \\ < 1^+|H^x &= z_0 < 1^+|, \qquad < \omega^+|H^x = \omega < \omega^+|. \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Además, tenemos las relaciones de ortonormalización

$$< 1^+|1^- > = 1, \quad < \omega^+|\omega'^- > = \delta(\omega - \omega'), \qquad (3.5)$$

y la relación de complitud

$$|1^- >< 1^+| + \int_0^{\infty} d\omega|\omega^- >< \omega^+| = 1, \qquad (3.6)$$

donde los autovectores están dados, en función de los autovectores del Hamiltoniano no perturbando H_0, por

$$\begin{aligned} &|1^- > = (\alpha'(z_0))^{-\frac{1}{2}}(|1 > + \int_0^{\infty} d\omega \frac{\lambda V(\omega)}{z_0 - \omega + i\varepsilon}|\omega >), \\ &< 1^+| = (\alpha'(z_0))^{-\frac{1}{2}}(< 1| + \int_0^{\infty} d\omega \frac{\lambda V(\omega)}{z_0 - \omega - i\varepsilon} < \omega|), \\ &|\omega^- > = |\omega > + \frac{\lambda V(\omega)}{\tilde{\alpha}_+(\omega)}(|1 > + \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\lambda V(\omega')}{\omega - \omega' + i\varepsilon}|\omega' >), \\ &< \omega^+| = < \omega| + \frac{\lambda V(\omega)}{\alpha_-(\omega)}(< 1| + \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\lambda V(\omega')}{\omega - \omega' - i\varepsilon} < \omega'|), \end{aligned}$$

$$(3.7)$$

donde los $i\varepsilon$ aparecen al considerar las condiciones de contorno indicando el camino seguido para realizar la extensión analítica y la función $\tilde{\alpha}_+(\omega)$ es tal que encuentra al polo en z_0, dada por

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}_+(\omega)} = \frac{1}{\alpha_+(\omega)} + 2\pi\mathrm{i}\frac{\delta(\omega - z_0)}{\alpha'_+(z_0)},$$

la cual es comprendida según la relación

$$\int_0^{\infty} d\omega \frac{\phi(\omega)}{\tilde{\alpha}_+(\omega)} = \int_\Gamma dz \frac{\phi(z)}{\alpha_+(\omega)},$$

donde Γ es un camino de integración que encierra al eje real y al polo en z_0 y $\phi(\omega)$ es cualquier función de prueba admitiendo una extensión analítica en el semiplano complejo inferior debajo de z_0.

Vemos entonces que, el autovalor generalizado z_0 puede considerarse como un valor complejo del espectro de H^x, tal que manteniendo la condición de **analiticidad**, permite reobtener el valor discreto el cual, por su carácter complejo, representará un estado con decaimiento puramente exponencial.

Ahora bien, para interpretar que representan los autovectores generalizados debemos encontrar las propiedades mínimas que deben cumplir las funciones del espacio de prueba Φ de modo tal que $<\phi|\nu^- >$ y $<\nu^+|\phi>$ sean finitas, con $\phi \in \Phi$ y donde ν representa el par 1, ω. Dejando de lado los detalles técnicos, es fácil probar que los autovectores a derecha e izquierda pertenecen a dos espacios equipados distintos siendo sus correspondientes funciones de prueba, funciones de las clases de Hardy[22,13,15] desde arriba y desde abajo, respectivamente. En tal caso se puede probar que la evolución dinámica de los autovectores del discreto se rige por

$$e^{-iH^x t}|1^- >= e^{-i\omega_0 t}\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}|1^- >, \qquad t>0$$

$$e^{-iH^x t}|1^+ >= e^{-i\omega_0 t}\, e^{\frac{\gamma}{2}t}|1^+ >, \qquad t<0$$

es decir, el estado $|1^->$ decae en el futuro y el estado $|1^+>$ lo hace en el pasado. Tal desdoblamiento conduce a una evolución unitaria en el tiempo que tiene la propiedad de semigrupo, tal que el autovalor del generador del semigrupo corresponde al polo en la segunda hoja de Riemann de $\alpha(z)^{-1}$ y los autovectores son autovectores generalizados con autovalor complejo. Este comportamiento corresponde a una evolución determinística irreversible.

Si ahora aplicamos la operación de inversión temporal definida para los vectores de Φ y extendida para los vectores de Φ^x, podemos ver que los estados que decaen hacia el pasado se transforman en vectores que caen hacia el futuro y viceversa. Es nesesaria la introducción de una regla de **selección** que prohiba la conbinación de vectores de los dos espacios de Hilbert equipados para que el decaimiento produzca una dirección privilegiada del tiempo. Una vez seleccionado un espacio de tiempo Hilbert equipado la diferencia entre pasado y fururo se transforma en sustancial aunque la selección sea convencional.

IV. VARIABLE DE LYAPUNOV Y RELACION CON LA ESCUELA DE BRUSELAS.

Podemos considerar, como en el formalismo usual de proyección para obtener ecuaciones maestras,[17,18,21,23] pero sin la necesidad de recurrir al espacio de Louville, dos proyecciones ortogonales que separan las partes discretas de la parte continua del Hamiltoniano. Las mismas para el caso del Hamiltoniano no perturbado H_0 serán transformadas, mediante la transformación que diagonaliza el Hamiltoniano en el caso en que haya interacción, en un par de proyectos nuevamente ortogonales sobre los nuevos subespacios representativos de la parte discreta y continua (lo que la escuela de Bruselas llama subdinámicas en el caso particular de este modelo[24]). La transformación que diagonaliza el Hamiltoniano y efectua el cambio de la base no perturbada a la perturbada en este caso puede escribirse como

$$\Lambda = |1^+ >< 1| + \int_0^\infty d\omega |\omega^+ >< \omega|, \qquad (4.1)$$

donde $|1>|\omega>$ es la base del sistema no perturbdo. Esta transformación no es unitaria como en el caso de la Mecánica Cuántica usual sino que verifica

$$K\Lambda K^\dagger = \Lambda^* = |1><1^-| + \int_0^\infty d\omega |\omega >< \omega^-|,$$

tal que

$$\Lambda^*\Lambda = 1, \quad \Lambda^* = \Lambda^{-1},$$

siendo K el operador de inversión temporal de Wigner[25] (recordando que $K|\nu^- > = |\nu^+>$, y viceversa, con $|\omega^\pm >=|1^\pm >, |\omega^\pm >)$, donde Λ es una transformación estrella-unitaria según la denominación dada por la escuela de Bruselas.[21] Esta transformación fue obtenida por primera vez por Prigogine y colaboradores[21] pero en un inadecuado marco matemático e invocando a una errónea propiedad de inversión temporal en el caso de la termodinámica de los procesos irreversibles. En tal caso ciertas características escenciales al comportamiento que conduce a una evolución al equilibrio fueron omitidas (sólo se obtenía, mediante el fomalismo de la transformada de Laplace, la diagonalización exacta del operador Liovillano en el caso en que no existiera una condición de resonancia (acoplamiento discreto-continuo)[26] y a una diagonalización con una matemática que introducía una flecha del tiempo de antemano en el fomalismo en el caso ed existir tal condición de resonancia (regla $i\varepsilon$[27])). Además la validez del metodo de la escuela de Bruselas quedaba así restringido a casos nunca observados en la naturaleza.[28]

Con ayuda de la transformación definida en (4.1) y aplicando la proyección sobre la parte discerta del espectro (en ste sentido podemos decir que sólo retenemos la información macroscópica relevante aportada en el estado inestable, considerando al continuo como un baño irelevante) es fácil construir muna variable de Lyapunov $\mathcal{Y}$ como

$$\mathcal{Y} = -\mathrm{Tr}([\Lambda^{*}|1^{-}>]^{\dagger}\,[\Lambda^{*}|1^{-}>]), \qquad (4.3)$$

la cual es una función monótonamente creciente en el tiempo $d\mathcal{Y}/dt > 0$, con

$$\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_1 e^{-\gamma t} - \mathcal{Y}_0, \qquad \lim_{t\to\infty}\mathcal{Y} = -\mathcal{Y}_0.$$

El estado de equilibrio puede ser considerado como aquel que maximiza la función de Lyapunov (las fluctuaciones han sido eliminadas por una cuestión práctica al proyectar sólo sobre los estados del discreto).

Hemos completado un esquema matemático adecuado mediante el estudio de un modelo sencillo para describir el comportamiento irreversible de los sistemas inestables, permitiéndonos interpretar algunos de los resultados obtenidos por la escuela de Bruselas. En contraposición a la teoría cuántica usual, el decaimiento queda descripto por una ley exponencial válida para todo tiempo. El poder predictivo del modelo puede quizás ser de constrastación experimental.

V. CONCLUCIONES

Es interesante señalar cuales son las ventajas que presenta el método desarrollado en este trabajo. En primer lugar, la descripción desarrollada es exacta en contraste con los otros métodos conocidos en la literatura (princialmente el de proyección de Nakajima y Zwanzing). En nuestro modelo la irreversibilidad aparece como consecuencia de la presencia de resonancia enre los espectros discreto y continuo o por la pesencia del caos en los sistemas clásicos no tratados aquí, en cambio los formalismos usuales de proyección permiten en principios obtener comportamientos irreversibles para cualquier sistema con tal que uno seleccione una parte relevante cuya evolución se desea estudiar. Además en el contexto desarrollado en el presente trabajo, las proyecciones son canónicas, en el sentido de que las mismas quedan unívocamente determinadas ya que deben separar la parte discreta de la parte continua del Hamiltoniano. Vale aclarar que no nesesitamos pasar al espacio de Liouville (con estados mixtos, en general) sino que para estados puros encontramos ya una manifestación intrínseca del fenómeno de la irreversabilidad. Por último, pensando en una generalización del concepto de entropía[15] vemos que podemos considerar tanto a las leyes microfísicas como a las leyes macrofísicas como de carácter fundamental (primero principios) ya que ninguna es derivada desde la otra por medio de una aproximación. También la descripción gana en simplicidad de cálculo ya que respecto de la condición inicial, la misma, con tal que se considere al estado inestable ya formado, no necesita de ninguna aplicación adicional, como en el caso usual donde se considera una condición tipo Somerfeld (aunque más no sea por simplicidad matemática). La consecuencia inmediata derivable del modelo es que éste produce un decaimiento exponencial válido para todo instante de tiempo a diferencia de la Mecánica Cuántica convencional como mencionamos en la introducción. Pruebas experimentales para chequear el apartamiento o no de la ley de decaimiento exponencial son muy difíciles de realizar pero los intentos conocidos no pudieron encontrar ningún apartamiento de la misma.[29,30]

REFERENCIAS

1. G.A: Gamow, Z. Phys. **51**, 204 (1928); **52**, 510 (1928).
2. G. Breit and E. P. Wigner, Phys. Rev. **49**, 519 (1936).
3. C. Moller, K. Dan. Vid. Selks. Mat. Fys. Medd. **22**, 3 (1946).
4. V. F. Weisskopf and E. P. Wigner, Z. Phys, **63**, 54 (1930); **65**, 18 (1930).
5. B. Misra and E.C.G. Sudarashan, J. Math. Phys. **18**, 756 (1977).
6. L.A. Khalfin, JETP Lett. **8**, 65 (1968).
7. I.M. Gel'fand and N.Y. Vilenkin, *Generalized Functions*, vol. 4, Academic Press, New York (1964). Véase también, A. Bohm, *The Rigged Hilbert Spaces and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlín (1973); *Quantum Mechanics: Foundations and Aplications*, Springer-Verlag, Berlín (1986); L.E. Ballentine, *Quantum*

Mechanics, Prentice Hall, New Jersey (1990).
8. K.O. Friedrichs, Comm. Pure Appl. Math. **1**, 361 (1948).
9. E.C.G. Sudarshan, C.B. Chiu, and V. Gorini, Phys. Rev. D**18**, 2914 (1978).
10. G. Parravicini, V. Gorini, and E.C.G. Sudarashan, J. Math. Phys. **21**, 2208 (1980).
11. A. Bohm, J. Math. Phys. **22**, 2613 (1981); A. Bohm, M. Gadella, and G.B. Mainland, Am. J. Phys. **57**, 1103 (1989).
12. M. Gadella, J. Math. Phys. **22**, 1462 (1981); **24**, 2142 (1983); **25**, 2461 (1984).
13. I.E. Antoniou and I. Prigogine, *Dynamics and Intrinsic Irreversibility*, enviado a Nuovo Cimento (1991).
14. L.P. Horwitz and C. Piron, *The Unstable System and Irreversible Motion in Quantum Theory*, preprint Ianssns 92/58 (1992).
15. M.A. Castaningno, F.H. Gaioli, and E. Gunzing, *Cosmological Features of the Time Asymmetry*, en preparación.
16. Para una exposición detallada de los siguientes formalismos, véase D.H. Zeh, *The Physical Basis of the Directions of Time*, Springer-Verlag, Berlín (1989).
17. S. Nakajima, Prog. Theor. Phys. **20**, 948 (1958).
18. R.W. Zwazig, J. Chem. Phys. **33**, 1338 (1960); *Statistical Mechanics of Irreversibility*, Lect. at the Summer Inst. of Theor. Phys. (Univ. of Colorado, 1960), Ed. Wesley Brittin, Interscience, New York (1961).
19. H.H. Hasegawa and W.C. Saphir, *Unitarity and Irreversibility in Chaotic Systems*, prepint 1992.
20. I. Antoniou and S. Tassaki, *Generalized Spectral Decompositions of Mixing Dynamical Systems*, prepint 1992; *Spectral Decompositions of the Renyi Map*, prepint 1992; *Generalized Spectral Decomposition of the *-adic Baker Transformation and Inrtinsic Irreversibility*, prepint 1992.
21. I. Prigogine, C. George, F. Henin, and L. Rosenfeld; Chem. Scripta 4, 5 (1973); R. Balescu, *Equilibrium and Non-Equilibrium Statical Mechanics*, J. Willey & Sons, New York (1975).
22. P. Duren, *Theory of H*-spaces*, Academic Press, New York (1970); P. Koosis, *Introduction to H*-spaces*, Cambridge Univ. Press, London (1980).
23. C. Obcemea and E. Brandas, Ann. Phys. (NY) **151**, 383 (1983).
24. A.P. Grecos and I. Prigogine, Physica **59**, 77 (1972); Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **69**, 1629 (1972).
25. E.P. Wigner, Gottinger Nachrichten **31**, 546 (1932).
26. C.C. Chiang, Nuovo Cimento **25**B, 125 (1975).
27. C. George, Bull. Acad. Roy. Belg. Cl. Sci. **56**, 505 (1970).
28. P.V. Coveney and O. Penrose, *On the Validity of the Brusels Formalism in Statical Mechanics*, prepint 1992.
29. E.B. Norman, S.B. Gazes, S.G. Crane, and D.A. Bennett, Phys. Rev. Lett. **60**, 2246 (1988).
30. W.M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger, and D.J. Wineland, Phys. Rev. A **41**, 2295 (1990).