

# PROPAGACION DE FRENTE EN UN MODELO DE REAC- CION-DIFUSION PARA UNA INESTABILIDAD ELECTROTÉRMICA

Marcelo Kuperman<sup>1</sup>, Horacio Wio<sup>2</sup>, Damián Zanette<sup>2</sup>  
Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro 8400,  
San Carlos de Bariloche, Río Negro.

Tomando como modelo el "Resistor lastrado", en donde se presentan aspectos difusivos y reactivos, se estudia la propagación de frentes de forma de burbuja y escalón para inestabilidades electrotérmicas. Se evalúan analíticamente las expresiones para tiempos cortos y tiempos largos y se utilizan métodos numéricos para el estudio de la evolución temporal de las expresiones en todo el intervalo de tiempo. Los límites asintóticos calculados se comparan luego con los resultados numéricos.

El interés en la propagación de estructuras en medios excitables radica en la amplitud de su campo de aplicación en física, química, etc. Para ello es importante contar con métodos analíticos o numéricos adecuados para estudiar tales fenómenos. En este trabajo y con la finalidad de evaluar la eficiencia de métodos con una fuerte componente analítica, que permiten reducir en gran medida el problema numérico a la evaluación de expresiones cerradas, se ha estudiado un modelo sencillo que describe una inestabilidad electrotérmica. Dicho modelo corresponde al denominado "Resistor lastrado", y esencialmente consiste en una ecuación de reacción-difusión, no lineal, para un sistema biestable, cuyo término reactivo se aproxima por medio de una linealización por trozos.

El resistor lastrado es un viejo dispositivo eléctrico utilizado para estabilizar la corriente en algunas aplicaciones técnicas. Consiste en un alambre fino que transporta corriente rodeado por un refrigerante que se mantiene a temperatura constante. Se ha mostrado que, en este dispositivo, se produce una inestabilidad electrotérmica que da lugar a perfiles estacionarios y no uniformes de temperatura a lo largo del alambre<sup>1</sup>.

El estado del sistema se puede caracterizar por una distribución de temperatura  $T(y, \tau)$  dependiente de la posición y del tiempo, que satisface<sup>2</sup>.

$$c \frac{\partial}{\partial \tau} T(y, \tau) = \frac{\partial}{\partial y} \lambda(y) \frac{\partial}{\partial y} T(y, \tau) - q[T(y, \tau) - T_B] + I^2 R(T), \quad (1)$$

donde  $c$  es el calor específico por unidad de longitud,  $\lambda(y)$  es la conductividad térmica  $q$  el coefi-

ciente de transferencia de calor al baño térmico, de temperatura  $T_B$ , y  $R(T)$  la resistencia del alambre por unidad de longitud. Este último término, no lineal, se aproximará por  $R(T) = R_0 \theta(T - T_c)$ , donde  $\theta$  es la función escalón de Heaviside,  $R_0$  es constante y  $T_c$  es la temperatura crítica. Introduciendo variables adimensionales y considerando  $\lambda(y)$  constante, la ecuación anterior se puede reducir a

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = \frac{\partial}{\partial x^2} \phi(x, t) - \phi(x, t) + \phi_h \theta(\phi(x, t) - \phi_c), \quad (2)$$

donde hemos denominado  $\phi$  al campo genérico con el que vamos a trabajar.  $\phi_h$  es una constante. Este esquema puede ser interpretado como una versión lineal por trozos de un modelo químico del tipo del Schlögl<sup>3</sup>. Un esquema similar denominado "Hot Spot Model" ha sido utilizado para describir inhomogeneidades del campo de temperaturas en alambres superconductores<sup>4</sup>. En este caso el término no lineal presenta dos puntos de equilibrio estable en  $\phi = 0$ ,  $\phi = \phi_h$ , y un punto inestable en  $\phi = \phi_c$ .

Con el objeto de estudiar propagación de estructuras y frentes consideraremos un medio infinito<sup>5</sup>.

A través de un esquema basado en integrales de camino es posible mostrar<sup>6</sup> que

$$\frac{\phi(x, t)}{\phi_h} = \frac{1}{\phi_h} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t | x', 0) \phi(x', 0) dx' - \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x, t | x', t') \theta(\phi(x', t') - \phi_c) \quad (3)$$

donde  $K(x, t | x', t')$  es el propagador que corresponde a la parte lineal en la ecuación (2), y  $\phi(x, 0)$  es la condición inicial. Si tomamos como

<sup>1</sup> Becario CONICET

<sup>2</sup> Carrera de Investigador CONICET

condición inicial un escalón,  $\phi(x,0) = \phi_h \theta(x - x_c(0))$ , donde  $x_c(t)$  es el punto en el cual el campo alcanza el valor crítico  $\phi_c$ , la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{\phi(x,t)}{\phi_h} = \frac{1}{2} e^{-t} \operatorname{Erfc}\left(\frac{x_c(0)}{\sqrt{4t}}\right) + \frac{1}{2} \int_0^t dt' e^{-(t-t')} \operatorname{Erfc}\left(\frac{x - x_c(t')}{\sqrt{4(t-t')}}\right) \quad (4)$$

que especializada en  $\phi(x,t) = \phi(x_c(t),t) \equiv \phi_c$  resulta

$$\frac{\phi_c}{\phi_h} = \frac{1}{2} e^{-t} \operatorname{Erfc}\left(\frac{x_c(t)}{\sqrt{4t}}\right) + \frac{1}{2} \int_0^t dt' e^{-(t-t')} \operatorname{Erfc}\left(\frac{x_c(t) - x_c(t')}{\sqrt{4(t-t')}}\right) \quad (5)$$

Por otro lado es de interés ver cual es la dependencia temporal de la velocidad de propagación de dicho frente<sup>5</sup>, para lo cual, se desarrolla a primer orden alrededor de  $t$  la función  $\operatorname{Erfc}(x_c/t)$  y se obtiene

$$\int_0^t dt' e^{-(t-t')} \operatorname{Erfc}\left(\frac{x_c(t) - x_c(t')}{\sqrt{4(t-t')}}\right) \rightarrow e^{-t} \times \left[ e^t \operatorname{Erfc}\left(\frac{x_c(t)}{\sqrt{4t}}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t dt' \frac{1}{\sqrt{4(t-t')}} \exp\left(\frac{-(x_c(t) - x_c(t'))^2}{4(t-t')}\right) \left[ -x_c(t') + \frac{1}{2} \frac{x_c(t) - x_c(t')}{(t-t')} \right] \right] \quad (6)$$

De esta expresión se pueden deducir los comportamientos asintóticos para tiempos largos

$$x_c = \frac{2z}{\sqrt{1-z^2}} \quad (7)$$

y tiempos cortos

$$z = \dot{x}_c \frac{1}{2\sqrt{1+\dot{x}_c^2/4}} \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{t\left(1+\frac{\dot{x}_c^2}{4}\right)}\right) \quad (8)$$

de modo que para que se cumpla la igualdad (8)

$$\dot{x}_c(t) = \alpha/\sqrt{t} \text{ cuando } t \rightarrow 0.$$

En ambos casos  $z = 1 - 2\phi_c/\phi_h$ , y  $\alpha$  es tal que  $\operatorname{Erfc}(z) = \alpha/2$ .

En el caso de que la condición inicial sea una estructura tipo burbuja, centrada en  $x = 0$  y con ancho inicial  $2x_c(0)$  la expresión (3) toma la forma

$$\frac{\phi(x,t)}{\phi_h} = \frac{1}{2} e^{-t} \left( \operatorname{Erfc}\left(\frac{x_c(t)}{\sqrt{4t}}\right) - \operatorname{Erfc}\left(\frac{-x_c(t)}{\sqrt{4t}}\right) \right) + \frac{1}{2} \int_0^t dt' e^{-(t-t')} \left( \operatorname{Erfc}\left(\frac{x - x_c(t')}{\sqrt{4(t-t')}}\right) - \operatorname{Erfc}\left(\frac{-x - x_c(t')}{\sqrt{4(t-t')}}\right) \right) \quad (9)$$

A fin de proceder a la resolución numérica del problema es apropiado analizar la estructura de las expresiones (4) y (9). El valor de  $x_c(t)$  que aparece en el integrando del segundo término debe ser hallado consistentemente con la solución de  $\phi(x,t)$ , de manera que el problema presenta un carácter trascendente. Es por eso que surge la necesidad de recurrir a un método numérico de resolución, que consiste en transformar la integral en una sumatoria sobre intervalos temporales suficientemente pequeños y considerar que dentro de cada intervalo el valor de  $x_c(t)$  se mantiene constante. De esta manera, se calculan los valores para  $x_c(t = k\tau)$ , tomando como dato los valores calculados en los pasos anteriores para  $x_c(j\tau)$ , donde  $\tau$  es la longitud del intervalo temporal,  $k, j$  son números enteros positivos, y  $j < k$ . La expresión (3) se transforma en

$$\frac{\phi(x, k\tau)}{\phi_h} = \frac{1}{\phi_h} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t|x', 0) \phi(x', 0) dx' - \sum_{j=0}^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x, k\tau|x', j\tau) \theta(\phi(x', j\tau) - \phi_c). \quad (10)$$

De esta expresión se obtienen las versiones y las versiones discretizadas de (4) y (9).

En las Figs. 1 y 2 se muestran resultados para la propagación de frentes de acuerdo a la expresión (4), mientras que la evolución temporal del frente tipo burbuja, ecuación (9), aparece representada en la Fig.3. Los comportamientos allí indicados son cualitativamente correctos y se comparan adecuadamente con lo observado en otros cálculos<sup>5</sup>.

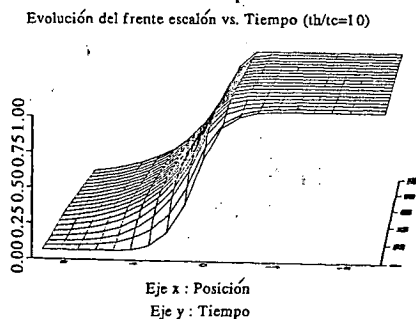


Fig. 1: Evolución temporal y propagación de un frente tipo escalón y la velocidad del punto crítico  $x_c$  para  $\phi_h/\phi_c = 10$ .

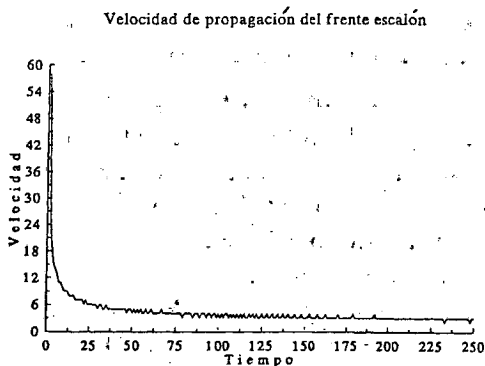


Fig. 2: La evolución del frente tipo escalón, hasta cierto tiempo final  $T_f$ , aparece representada en función de diferentes valores de la relación  $\phi_h/\phi_c$ . Es importante observar el cambio de comportamiento del frente a partir de  $\phi_h/\phi_c = 2$ , ya que para este valor el frente evoluciona con velocidad de propagación nula y por debajo o por encima de este valor la velocidad toma valores negativos o positivos respectivamente.

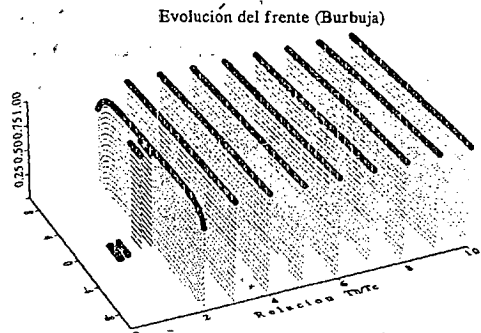


Fig. 3: Análogamente a la Fig.2, se representa la evolución del frente tipo burbuja hasta cierto tiempo final  $T_f$  en función de diferentes valores de la relación  $\phi_h/\phi_c$ . Nuevamente se aprecia un cambio de comportamiento del frente a partir de  $\phi_h/\phi_c = 2$ .

De las figuras se puede inferir que el valor obtenido numéricamente para la velocidad de propagación del frente diverge a tiempos cortados y tiende a un límite finito que coincide con el valor calculado analíticamente, cuando el tiempo tiende a  $\infty$ . Por lo tanto los comportamientos asintóticos del frente que se deducen de las expresiones derivadas analíticamente coinciden con los obtenidos por medio de simulaciones numéricas.

Una comparación detallada con resultados numéricos de otros autores, como así mismo el estudio del efecto de condiciones de contorno será el tema de un próximo trabajo<sup>6,7</sup>.

## REFERENCIAS

1. H. Busch; Ann. Phys. (Leipzig). **64**, 401 (1921)
2. P. Mazur y D. Bedeaux; J. Stat. Phys. **24**, 215 (1981)  
C.L. Schat y H.S.Wio; Physica **A180**, 295 (1992)
3. F. Schlögl; Z. Physik **248**, 446 (1971), **253**, 147 (1972).
4. W.J. Skocpol, M.R. Beasley, M. Tinkham; J. Appl. Phys. **45**, 4054 (1974)
5. A.S. Mikhailov; *Foundations of Synergetics*. Springer-Verlag (1991)
6. M. Kuperman, H. Wio, D. Zanette; *Front propagation in reaction-diffusion systems*; en preparación.
7. S. Hassan, M. Kuperman, H. Wio, D. Zanette; *Effects of boundary conditions on front propagation in reaction-diffusion systems*; en preparación.