

# TEORIA DE CUERDAS EN METRICAS DE ONDAS PLANAS EXACTAS

**O. Jofre**

*Instituto de Astronomía y Física del Espacio  
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas  
C.C. 67, suc. 28, 1428 Buenos Aires*

**J.M. Maldacena**

*Centro Atómico Bariloche,  
Comisión Nacional de Energía Atómica,  
Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, 8400 S.C. de Bariloche.*

**C. Núñez**

*Instituto de Astronomía y Física del Espacio,  
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, C.C.67, suc. 28, 1428 Buenos Aires*

Se estudia la propagación de cuerdas bosónicas en espacio-tiempos de ondas planas exactas, que son soluciones de las ecuaciones requeridas por la invariancia conforme de la teoría. Se encuentran singularidades en el sentido de las cuerdas, a pesar de que el espacio-tiempo no las tiene en el sentido de Relatividad General; es decir es un espacio geodésicamente completo. También se calcula la amplitud de scattering de taquiones en esta métrica y se analizan sus propiedades asintóticas y la factorizabilidad. Se discuten algunas consecuencias de estos resultados.

## I. INTRODUCCIÓN

La escala de Planck es la frontera a la cual una teoría cuántica completa de la gravedad se hace necesaria. En efecto, si el campo gravitatorio se trata como una pequeña perturbación, la constante de acoplamiento: el cuadrado de la longitud de Planck  $Gh/c^3$  tiene dimensiones. Cuando la escala de longitud de los procesos cuánticos de interés caen por debajo del valor de Planck, los órdenes superiores de la teoría perturbativa se hacen comparables con los inferiores y el desarrollo deja de ser válido. Esto sucede cerca de una singularidad.

En relatividad general las singularidades se definen en base a partículas de prueba. La mayoría de las soluciones (interesantes) a las ecuaciones de Einstein son geodésicamente incompletas en el sentido que las partículas de prueba no pueden evolucionar durante un tiempo infinito. Los efectos cuánticos de la gravedad no pueden ignorarse cuando la teoría clásica predice una singularidad. Como la teoría de cuerdas no sufre de los problemas más graves que afectan a la teoría cuántica de la relatividad (anomalías, no renormalizabilidad) resulta natural preguntarse si las soluciones a las ecuaciones clásicas para la métrica predichas por la teoría de cuerdas son o no singulares, y si lo son, cómo se resuelven en este caso los problemas que debe afrontar la relatividad cuántica.

Parece razonable definir singularidad en el sentido de cuerdas de la misma manera que en el caso de partículas, en base al movimiento de cuerdas de prueba. Sin embargo, hay soluciones singulares (orbifolds) en las cuales la primera cuantificación de la teoría está bien definida; por lo tanto diremos que una teoría es singular en el sentido de cuerdas cuando los observables físicos asociados a ella son divergentes. Las ecuaciones clásicas de la métrica en teoría de cuerdas están dadas por la condición de invariancia conforme del modelo  $\sigma$  no lineal. Perturbativamente se reducen a las ecuaciones de Einstein corregidas con términos de orden superior construidos con potencias y derivadas de la métrica:

$$0 = R_{\mu\nu} + \alpha' R_{\mu\lambda\rho\sigma} R_{\nu}^{\lambda\rho\sigma} + \dots \quad (1)$$

donde  $\alpha'$  es de la escala de Planck. Las métricas con tensor de Ricci nulo ("Ricci planas") y con tensor de curvatura mucho menor que la curvatura de Planck son soluciones aproximadas, cualitativamente semejantes a las de la relatividad general. Pero en una región cercana a una singularidad, donde  $R \sim R_{Planck}$  las soluciones pueden ser muy diferentes de las soluciones a las ecuaciones de Einstein. En particular, existen soluciones singulares en el sentido de la relatividad general y también en el sentido de cuerdas.

Recientemente se ha demostrado<sup>1</sup> que las ondas planas son solución a todo orden en  $\alpha'$ , incluso no

perturbativamente. Esta solución es interesante porque los mismos argumentos con los que se demuestra que no hay creación de partículas (la existencia de un vector nulo covariantemente constante) pueden usarse para demostrar que no hay creación de cuerdas<sup>2</sup>, fenómeno que debería discutirse en el contexto de una segunda cuantificación que todavía no ha sido formulada. Pero sí hay creación de modos debido a que no se conserva la frecuencia positiva en la hoja de mundo de la cuerda.

La métrica de onda plana tiene la forma:

$$ds^2 = -dUdV + dX^i dX_i + F(U, X^i) dU^2 \quad (2)$$

donde  $U = T - Z, V = T + Z$  y  $X^i$  son  $(D - 2)$  coordenadas transversales en un espacio-tiempo de  $D$  dimensiones. Esta métrica es solución de las ecuaciones de Einstein si  $\partial_T^2 F = 0$ . En el caso particular  $F(U, X^i) = W_{ij}(U) X^i X^j$  se llaman ondas planas exactas o gravitatorias.

Horowitz y Steif<sup>3</sup> mostraron que una cuerda que trata de propagarse a través de un frente de ondas planas singular se excita infinitamente. De Vega y Sánchez<sup>4</sup> mostraron que la excitación es finita en el caso de la métrica de Aichelburg y Sexl.

## II. OPERADOR DE MASA EN MÉTRICA DE ONDAS PLANAS EXACTAS

En esta sección nos restringimos a soluciones de ondas planas exactas y consideramos la propagación de una cuerda en primera cuantización. Conviene considerar el perfil de la onda  $W_{ij}(U)$  como una matriz diagonal sin traza y que sólo sea una función de  $U$  distinta de cero en una región  $0 \leq U \leq T$ , de forma de tener asintóticamente estados libres de la cuerda usual, es decir que los estados oscilatorios "in" ( $U \rightarrow -\infty$ ) se pueden relacionar con los estados oscilatorios "out" ( $U \rightarrow \infty$ ) mediante una transformación de bogoliubov.

Consideremos la métrica con  $F(U, X^i) = W(U)(X^2 - Y^2)$ , cuya generalización a más dimensiones es inmediata. La acción queda, de esta manera:

$$S = \frac{1}{2} \int d^2z (-\partial_a U \partial^a V + \partial_a X \partial^a X^i + W_{ij}(U) X^i X^j \partial_a \partial^a U) \quad (3)$$

y las ecuaciones de movimiento se obtienen de hacer variaciones con respecto a los campos  $X^\mu(\tau, \sigma)$ , siendo  $\tau$  y  $\sigma$  las coordenadas sobre la hoja de mundo:

$$\partial_a \partial^a X_i + \frac{1}{2} \partial_i F(U, K) P^2 = 0 \quad (4)$$

donde se ha elegido el gauge del cono de luz  $U = P\tau, P = cte$ , que es manifiestamente unitario. Para métricas de ondas planas exactas la ecuación (4) es lineal:

$$\partial_a \partial^a X_i + W_{ij}(U) X^j P^2 = 0 \quad (5)$$

i ahora podemos descomponer a  $X^i$  en modos:

$$X(\sigma, \tau) = \sum_n X_n(\tau) e^{in\sigma} \quad (6)$$

$$Y(\sigma, \tau) = \sum_n Y_n(\tau) e^{in\sigma} \quad (7)$$

donde  $X_{-n} = X_n^*, Y_{-n} = Y_n^*$ . Suponiendo que  $W(U) = 0$  para  $U < 0$  y  $U > T$ , y  $W(U) = W_0 = cte$  para  $0 \leq U \leq T$ , las ecuaciones (5) quedan:

$$\ddot{X}_n + n^2 X_n - W_0 P^2 X_n = 0 \quad (8)$$

$$\ddot{Y}_n + n^2 Y_n + W_0 P^2 Y_n = 0 \quad (9)$$

que son las ecuaciones de osciladores armónicos desacoplados. Para  $U < 0$  cada modo se puede descomponer en osciladores derechos e izquierdos

$$X_n = \frac{i}{2\sqrt{n}} (\alpha_n^x u_n - \tilde{\alpha}_n^x \tilde{u}_n) \quad (10)$$

donde  $u_n$  y  $\tilde{u}_n$  son soluciones a (8) de la forma

$$u_n = e^{-in\tau} \quad \tilde{u}_n = e^{in\tau} \quad (11)$$

y de manera similar para  $Y_n$ . Para  $U > T$  la descomposición puede hacerse en términos de osciladores "out" con soluciones  $v_n$  y  $\tilde{v}_n$ ,

$$X_n = \frac{i}{2\sqrt{n}} (b_n^x v_n - \tilde{b}_n^x \tilde{v}_n) \quad (12)$$

que estarán relacionadas linealmente con las  $u_n$  y  $\tilde{u}_n$ . La transformación de bogoliubov que relaciona los estados "in" con los "out" es:

$$b_n = A_n a_n - B_n^* \tilde{a}_n^\dagger \quad (13)$$

$$\tilde{b}_n = A_n \tilde{a}_n - B_n^* a_n^\dagger \quad (14)$$

La transformación uno para los osciladores de  $Y_n$  se obtiene de la de  $X_n$  cambiando  $W_0 \rightarrow -W_0$ .

De esta transformación uno puede obtener el valor de expectación del operador de número para el oscilador  $n$ -ésimo en la región "out" si la cuerda estaba inicialmente en el estado fundamental:

$$\begin{aligned} \langle 0in | N_x^{n\ out} | 0in \rangle &= \\ &= \langle 0in | b_n^{x\ \dagger} b_n^x | 0in \rangle = |B_n|^2 \end{aligned} \quad (15)$$

y lo mismo para los osciladores derechos. El operador de masa en la región "out" será entonces:

$$M_{out}^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} n (b_n^{i\ \dagger} b_n^i + \tilde{b}_n^{i\ \dagger} \tilde{b}_n^i) - 8 \quad (16)$$

que se puede expresar en términos de  $\langle N \rangle$

$$\langle M_{out}^2 \rangle = 4 \sum_{n,j} n \langle N_n^i \rangle - 8 \quad (17)$$

La convergencia de esta serie es un criterio para determinar si una solución es singular o no en el sentido de la teoría de cuerdas. Podría ocurrir que una divergencia en la métrica condujera a un espacio geodésicamente incompleto (singularidad en el sentido de relatividad general), pero que los observables de la teoría de cuerdas estuvieran bien definidos<sup>5</sup>. En este caso las cuerdas estarían evitando la singularidad de la relatividad general, e decir que serían insensibles a ella. Por el contrario podría ocurrir que, por ejemplo, el operador de masa divergiera para alguna métrica que no fuera singular en el sentido de relatividad general, es decir lo contrario a lo que sucede en un orbifold. Veremos que este es el caso cuando se tiene un perfil deltiforme en la métrica  $W(U) \sim \delta(U)$ , que en caso de relatividad conduce a geodésicas discontinuas pero completas, y en el caso de cuerdas conduce a divergencias en  $\langle M^2 \rangle$ , lo cual podría interpretarse como que la cuerda no puede pasar físicamente la barrera

$U = 0$ . En este límite las fuerza tidales a las que está sometida la cuerda con mucho mas fuertes que la tensión de la misma.

Esta divergencia no se debe a que el cálculo se realiza en el contexto de una primera cuantización, porque se puede demostrar que las métricas de ondas planas no conducen a creación de cuerdas usando los mismos argumentos con los que se demuestra que no conducen a creación de partículas<sup>6</sup>.

Si se calcula el coeficiente  $|B_n|^2$  para un perfil  $W(U) = W_0$  en la región  $0 \leq U \leq T$  y  $W(U) = 0$  fuera de esa región, se obtiene exactamente

$$\begin{aligned} |B_n|^2 &= \left( \frac{1}{2} \frac{P^2 W_0}{n n'} \sin(n'T) \right)^2 \\ n' &= \sqrt{n^2 - W_0 P^2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\langle M^2 \rangle = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} \frac{P^2 W_0}{n'} \sin(n'T) \right)^2 - 8 \quad (19)$$

es decir, que en general, todos los modos de la cuerda quedan excitados una vez que esta atraviesa la onda gravitatoria pero el operador de masa "out" resulta ser finito, es decir que la suma en la ecuación (19) es convergente para un  $W_0$  finito.

Podemos analizar ciertos límites, como  $T \rightarrow 0$ , con lo cual  $\langle M^2 \rangle \rightarrow -8$  que es el estado fundamental (taquión) en el que estaba la cuerda antes de atravesar la onda. En cambio si hacemos que la altura del perfil sea cada vez mayor al mismo tiempo que el ancho se hace cada vez menor ( $W_0 \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow 0$ ) pero de manera que el área  $W_0 T$  sea constante, por ejemplo  $W_0 T = 1$ , entonces el perfil tiende a ser deltiforme:  $W(U) \rightarrow \delta(U)$ ; en este caso:

$$\langle N_n^{out} \rangle \rightarrow \left( \frac{P^2}{2n} \right)^2 \quad (20)$$

$$\langle M_{out}^2 \rangle \rightarrow 4 \left( \frac{P^2}{2} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - 8 \quad (21)$$

el operador de masa diverge. En este límite no vale la aproximación WKB utilizada en ref. 3.

Para un perfil un poco más complicado y continuo  $W(U) = W_0 / \cosh^2(\alpha U)$ , las ecuaciones de movimiento clásicas también se pueden resolver exactamente, dando:

$$|B_n^x|^2 = \left( \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{4W_0 P^2}{\alpha^2}} \right)}{\sinh \left( \frac{\pi n}{\alpha} \right)} \right)^2 \quad (22)$$

y para  $Y$  se cambia  $W(U) \rightarrow W_0$ . En este caso se puede ver que la suma que aparece en  $\langle M^2 \rangle$  es siempre convergente con  $W_0$  y  $\alpha$  finitos. En cam-

siempre convergente con  $W_0$  y  $\alpha$  finitos. En cambio si  $W_0 \rightarrow \infty$  y  $\alpha \rightarrow \infty$  ( altura creciente y ancho decreciente ) de forma tal que  $4W_0P^2 / \alpha = 1$ , esto conduce a una divergencia en el operador de número que hace divergente al operador de masa, constituyendo otro ejemplo de una divergencia en el sentido de cuerdas y no en el sentido de relatividad. Si en cambio pedimos los mismos límites pero ahora con  $W_0\alpha/2$ , entonces la función  $W(U)$  tiende a la delta  $\alpha(U)$ , y el operador de número conduce al mismo resultado que en el caso anterior (21).

Conviene anotar que la divergencia de  $\langle M^2 \rangle$  es un efecto puramente cuántico, puesto que clásicamente los osciladores están desacoplados ( ecuaciones (8) y (9) ), y la masa permanecería finita.

### III. AMPLITUD DE SCATTERING DE TAQUIONES

Es interesante calcular la amplitud de scattering de taquiones en esta métrica ya que esto puede dar un criterio adicional respecto de la posible singularidad de la teoría. Como veremos, la integral funcional correspondiente puede calcularse exactamente. Para poder hacerlo necesitamos integrar con la exponencial de la acción a los operadores de vértice responsables de la emisión de taquiones de momento  $k^\mu$ . Estos vértices deben cumplir con las propiedades conformes adecuadas, tener peso conforme definido e igual a uno. La ecuación que debe verificar el operador de vértice del taquiones <sup>7</sup>:

$$\Delta \mathcal{V}'_k(U, V, X^i) = -k^2 \mathcal{V}'_k(U, V, X^i) \quad (23)$$

es decir una ecuación tipo Klein-Gordon con

$$k^2 = -M^2 = -\frac{2}{\alpha'}. \text{ Esta ecuación es válida a orden } \alpha', \text{ y el laplaciano tiene la forma:}$$

$$\Delta = -4\partial_U\partial_V + \partial_i\partial^i - 4W_{ij}X^iX^j\partial_V^2 \quad (24)$$

Sin pérdida de generalidad podemos restringirnos a cuatro dimensiones, considerando que el resto de las 26 dimensiones constituye una variedad plana que no afectan a los cálculos que siguen. La solución a (23) es:<sup>8</sup>

$$\mathcal{V}'_k(U, V, X^i) = \frac{(p_1 p_2)^{-1}}{\sqrt{2k}} \exp^i \left( -k_- V + \frac{k_1}{p_1} X + \frac{k_2}{p_2} Y + k_- \frac{p_1}{p_1} X^2 + k_- \frac{p_2}{p_2} Y^2 - \frac{1}{4k_-} \int_0^U \left( \frac{k_1^2}{p_1^2} + \frac{k_2^2}{p_2^2} - M^2 \right) dU \right) \quad (25)$$

con:

$$p_1(U) = \exp(\sqrt{W_0}U) \quad (26)$$

$$p_2(U) = \exp(i\sqrt{W_0}U)$$

que se produce al vértice usual en el espacio plano cuando  $W_0 \rightarrow 0$ , es decir la altura del perfil de la onda gravitatoria tiende a cero, y la métrica tiende a Minkowski.

La amplitud de N taquiones será el valor de expectación de N operadores de vértice calculada como la integral funcional

$$A_N = \langle V_{k_1} V_{k_2} \dots V_{k_N} \rangle = \int DUDVDX^i V_{k_1} \dots V_{k_N} e^{-S\{U,V,X\}} \quad (27)$$

y la acción de la cuerda en esta métrica esta dada por la (3).

Se simplifican los cálculos si se hace una transformación de Lorentz para llevar todos los  $k_-^{(i)} = 0$ , excepto para dos de los taquiones:

$$k_-^{(i)} = 0 \quad i = 2, 3, \dots, (N-1) \quad (28)$$

$$k_-^{(i)} \neq 0 \quad i = 1, N \quad (29)$$

La integral funcional (27) puede calcularse fácilmente porque los campos aparecen a lo sumo cuadráticamente en la exponencial:

$$\mathcal{A}_n \sim \det^{-1}(\partial^2) \det^{\frac{-1}{2}}(G^{ij}) \mathcal{A}(1, N) \quad (30)$$

$$\mathcal{A}(1, q) \mathcal{A}(N, 1) \mathcal{A}(q, 1)$$

y donde:

amplitud en un factor divergente  $|\epsilon|^{-2\nu}$  por una función  $\Phi(|\epsilon|)$  regular cuando  $|\epsilon| \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1, N) &= |z_1 - z_N|^{-\frac{1}{4\pi}(k_\mu^{(1)} k^{\mu(N)} - k_\perp^{(1)} k_\perp^{(N)})} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left( (k_\perp^{(1)})^2 + i(k_\perp^{(N)})^2 \right) \frac{m}{2} \ln |z_1 - z_N| \\ &\quad \times (m l \xi_1 - \xi_N l)^{-\frac{1}{4\pi}} \\ &\quad (|z_1 - z_N|^{-\frac{(1+i)m}{2}} k_\perp^{(1)} k_\perp^{(N)} + (k_1^{(1)} k_1^{(N)} - k_2^{(1)} k_2^{(N)}) \frac{m^2}{2} |\xi_1 - \xi_N|^2 \\ &\quad \times e^{\frac{1}{4\pi} \left( |z_1 - z_N|^{-\frac{(1+i)m}{2}} \right) \frac{m^2}{4} (1-c) |\xi_1 - \xi_N|^2 (k_1^{(1)} k_1^{(N)} - k_2^{(1)} k_2^{(N)})} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(1, q) &= \prod_{q=2}^{N-1} (m l \xi_1 - \xi_q l)^{-\frac{1}{4\pi} (|z_1 - z_N|^{-\frac{m}{2}})} \\ &\quad k_1^{(1)} k_1^{(q)} \left( 1 + \frac{m^2}{4} |\xi_1 - \xi_q|^2 \right) \times (m l \xi_1 - \xi_q l)^{-\frac{1}{4\pi} (|z_1 - z_N|^{-\frac{im}{2}})} \\ &\quad k_2^{(1)} k_2^{(q)} \left( 1 - \frac{m^2}{4} |\xi_1 - \xi_q|^2 \right) \times (m l z_1 - z_q l)^{-\frac{1}{4\pi} (-4k_-^{(1)})} \\ &\quad k_+^{(q)} \times e^{-\frac{1}{4\pi} (|z_1 - z_N|^{-\frac{m}{2}}) k_1^{(1)} k_1^{(q)} - (|z_1 - z_N|^{-\frac{im}{2}} k_2^{(1)} k_2^{(q)}) (1-c) \frac{m^2}{4}} \\ &\quad |\xi_1 - \xi_q|^2 \\ \mathcal{A}(N, q) &= \mathcal{A}(1, q): \text{ donde se cambia } \xi_1 \leftrightarrow \xi_N \text{ y} \\ &\quad k_i^{(1)} \leftrightarrow k_i^{(N)} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(l, q) &= \prod_{l, q=2}^{N-1} (m l \xi_1 - \xi_q l)^{-\frac{1}{4\pi} k_\perp^{(l)} k_\perp^{(q)}} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{m^2}{4} |\xi_1 - \xi_q|^2 (k_1^{(l)} k_1^{(q)} - k_2^{(l)} k_2^{(q)}) \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{4\pi} \frac{m^2}{4} |\xi_1 - \xi_q|^2 (k_1^{(l)} k_1^{(q)} - k_2^{(l)} k_2^{(q)}) (1-c)} \end{aligned} \quad (34)$$

donde se definió  $\xi_i = \ln \left( \frac{z_i - z_1}{z_i - z_N} \right)$ ,  $m = k_- \sqrt{\alpha' W_0} / 4\pi$  y  $c$ : constante de Euler.

A partir de esta amplitud se puede conocer el espectro de masas de la teoría estudiando la factorización cuando, por ejemplo,  $z_i \rightarrow z_q$ , que son los puntos en la hoja de mundo donde están ubicados dos vértices  $l$ -ésimo y  $q$ -ésimo, respectivamente<sup>9</sup>. Es decir que si  $|z_l - z_q| = |\epsilon|$  se puede separar la

$$\begin{aligned} \int d^2 \epsilon |\epsilon|^{-2\nu} \Phi(\epsilon, \bar{\epsilon}) &= \\ &= \int d^2 \epsilon |\epsilon|^{-2\nu} \sum_{l, m} \frac{\epsilon^l \bar{\epsilon}^m}{l! m!} \partial^l \bar{\partial}^m \Phi_{l_0} \\ &= \sum_n \frac{\Lambda^{-2\nu + 2n + 2}}{-2\nu + 2n + 2} \left( \frac{1}{(n!)^2} (\partial \bar{\partial})^n \Phi_{l_0} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

donde  $\nu \sim k_\mu^{(l)} k^{(q)\mu}$  y los polos corresponden a las masa de los estados del espectro, que en esta métrica resultan ser las mismas que en el espacio plano. Es decir que la interacción de la cuerda con la métrica de ondas planas exactas no modifica los valores de las masas de la cuerda bosónica usual en un espacio de Minkowski. Sin embargo sí se modifican los residuos de los polos físicos, que son el producto de dos amplitudes entre los dos taquiones ( $l$ ) y ( $q$ ) con el estado intermedio que se intercambia, y entre estado con el resto de los taquiones. De la forma de ese residuo puede leerse la estructura que deben tener los distintos operadores de vértice de las partículas intermedias.

No queda claro si, el hecho que el operador de masa sea divergente para ciertas métricas, no esté indicando que la solución es inestable, debido a que podemos pensar que las cuerdas de prueba son pequeñas perturbaciones que no tienen por qué mantener la forma de la onda plana. Desafortunadamente los teoremas de singularidad de relatividad general no son de ayuda en este caso para asegurar estabilidad de las singularidades, porque los términos que aparecen en las ecuaciones clásicas para la métrica no siempre conducen a una fuerza de atracción, como la hipótesis en dichos teoremas.

## REFERENCIAS

- 1- D. Amati y C. Klimic, Phys. Lett. B219, 443(1989)
- 2- G. Horowitz y R. Steif, Phys. Rev. Lett 64, 260(1990)
- 3- G. Horowitz y R. Steif, "Strings in Strong Gravitational Fields", preprint UCSB-TH-90-8 (1990)

- 4- De Vega y N. Sanchez, "Quantum Propagation Through Gravitational Shock Waves", preprint LPTHE 90-95(1990)
- 5- L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa, E. Witten, Nucl. Phys. B261, 678(1985)
- 6- R. Penrose, Pyhs. Rev. Lett. 14, 57(1965)  
R. Penrose y S. Hawking, Proc. Roy. Soc. Lond. A314, 529(1970)
- 7- C. Callan y Z. Gan, Nucl. Pyhs. B272, 647(1986)
- 8- J. Garriga y E. Verdaguer, Phys. Rev. D43,391(1991)
- 9- G. Aldazabal, M Bonini, R. Iengo, C. Núñez, Phys. Lett. B199, 41(1987)