

# TEORIA DE LA CORRIENTE LIMITE PARA HACES DE ELECTRONES RELATIVISTICOS EN CONFIGURACION CILINDRICA

G.Gnavi\*, F.T.Gratton\* y C.Moreno\*\*

Instituto de Física del Plasma, CONICET,

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Física, Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pab. I, 1428 Buenos Aires.

Se estudia la condición para la cual haces de electrones acelerados a energías relativísticas e inyectados en una cámara de deriva entre electrodos cilíndricos equipotenciales desarrollan una inestabilidad, que limita la corriente máxima que puede fluir radialmente. El umbral de la inestabilidad (de Pierce) correspondiente a electrodos planos es modificado fuertemente por la curvatura. La corriente límite pasa de variar como  $L^{-2}$  a ser proporcional a  $L^{-1}$ , donde  $L$  es la distancia interelectrónica. Se encuentra que la corriente límite (para radio de electrodo de entrada y velocidad de inyección prefijadas) es mayor para haces divergentes que para el caso plano, y que a su vez la corriente crítica de este caso es mayor que la correspondiente a haces convergentes. Se observa que los efectos relativistas, por su parte, ayudan a obtener corrientes críticas más altas.

## INTRODUCCION

Los fenómenos colectivos asociados a haces de partículas cargadas en un plasma presentan una amplia variedad de efectos. En este trabajo consideraremos las condiciones para la estabilidad de un haz de electrones fluyendo radialmente entre dos grillas cilíndricas concéntricas equipotenciales, y se discutirá la densidad de corriente máxima que puede fluir entre ambas. Es sabido que un haz puede desarrollar una inestabilidad cuando deriva entre electrodos equipotenciales<sup>1-3</sup>; este fenómeno, conocido como la inestabilidad de Pierce<sup>4</sup> es interesante debido al hecho que, en ausencia de contornos, un solo haz es estable. Estos temas han sido estudiados para el caso de flujos paralelos (electrodos planos) y aquí se discute la extensión de esos estudios al caso de electrodos cilíndricos.

## FORMULACION DEL PROBLEMA

Sea un sistema con simetría cilíndrica en el cual tenemos un flujo radial de electrones. La velocidad del haz es  $\mathbf{v} \equiv -v_0 \mathbf{e}_r$  (con  $v_0$  constante) y en el estado estacionario su densidad varía como  $n_0 = n_e \mathcal{R}/r$ , donde el subíndice cero denota valores del estado estacionario,  $\mathbf{e}_r$  el versor cilíndrico en dirección radial,  $n_0$  la densidad del haz y  $n_e$  la densidad a un radio de emisión o entrada de los e-

lectrones  $\mathcal{R}_e$ . Se asume la existencia de un fondo neutralizante de iones (formado por ionización del gas residual de la cámara al pasar los electrones) que se supondrá inmóvil y de densidad  $n_0$ , de modo que el campo eléctrico estacionario es nulo. El sistema físico puede ser descrito por la ecuación de Newton con la fuerza de Lorentz, la ecuación de continuidad, y la ecuación de Ampère-Maxwell. Planteando perturbaciones radiales en la velocidad,  $\delta v$ , y densidad del haz,  $\delta n$ ; linealizando las mencionadas ecuaciones, se obtiene

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial r} \right) (\gamma_0 \delta v - v_0 \delta \gamma) = \frac{e}{m} E,$$

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (n_0 \delta v - v_0 \delta n)] = 0,$$

$$r \left( \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi \delta j \right) = f(t).$$

(1)

donde  $\delta j$  es la perturbación en la densidad de corriente,  $e$  y  $m$ , la carga y masa del electrón, respectivamente;  $E$  la amplitud del campo eléctrico,  $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ ,  $\gamma_0 = \gamma(v_0)$  y  $c$  la velocidad de la luz. La función  $f(t)$  queda determinada por las condiciones de contorno. Cabe señalar que la inestabilidad de una configuración "counterstreaming" cilíndrica, en un sistema no acotado fue estudiada por Gratton y Gnavi<sup>5</sup>. El espectro de modos normales es sustancialmente diferente del caso "counterstreaming" plano.

\* Investigador del CONICET

\*\* Becario Doctoral del CONICET

Las ecuaciones (1) se pueden escribir en términos de las siguientes cantidades adimensionales

$$V \equiv \frac{v - v_0}{v_0}, N \equiv \frac{(n - n_0) r}{n_e \mathcal{R}_e},$$

$$\tilde{E} \equiv \frac{r E}{4\pi e n_e R_e^2}, x \equiv \frac{r}{\mathcal{R}_e},$$

$$\tau \equiv \frac{v_0 t}{\mathcal{R}_e}, \mu \equiv \frac{\omega_p \mathcal{R}_e}{v_0},$$

$$F(\tau) \equiv \frac{f(\mathcal{R}_e \tau / v_0)}{4\pi e v_0 n_e \mathcal{R}_e}, I = \frac{r \delta j}{e n_e \mathcal{R}_e v_0}$$

de la siguiente forma

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \right) V = - \frac{\mu^2}{x} \tilde{E},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \right) N = - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{E} = V + F(\tau).$$

donde se ha empleado la ecuación de Poisson para expresar la perturbación de la densidad de corriente en términos de la amplitud del campo eléctrico,  $E$ , y se ha definido  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_e / \gamma_0^3 m$  como el cuadrado de la frecuencia de plasma correspondiente a los electrones.

Planteando soluciones del sistema (2) para modos normales (dependencia temporal  $e^{v\tau}$ ), por ejemplo:

$$\tilde{E}(x, \tau) \equiv \tilde{E}(x) e^{v\tau}, \quad (3)$$

la ecuación para  $E(x)$  resulta

$$\left( v - \frac{d}{dx} \right)^2 \tilde{E} + \frac{\mu^2}{x} \tilde{E} = v F_0,$$

cuya solución es

$$\tilde{E}(x) = e^{v\tau} \sqrt{x} [c_1 J_1(2\mu\sqrt{x}) + c_2 Y_1(2\mu\sqrt{x})] + \tilde{E}_p,$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes y  $\tilde{E}_p$  es una solución particular de la ecuación inhomogénea. Partiendo

de las soluciones de la ecuación homogénea es posible construir una solución particular de la inhomogénea de la forma

$$\tilde{E}(x) = \pi v F_0 e^{v\tau} \sqrt{x} \{ Y_1(2\mu\sqrt{x})$$

$$\int_1^x e^{-v\mu} \sqrt{u} J_1(2\mu\sqrt{u}) du -$$

$$- J_1(2\mu\sqrt{x}) \int_1^x e^{-v\mu} \sqrt{u} Y_1(2\mu\sqrt{u}) du \}$$

Además valen las relaciones

$$V(x) = \left( v - \frac{d}{dx} \right) \tilde{E} - F_0,$$

$$N(x) = - \frac{d\tilde{E}}{dx}, \quad (4)$$

$$I = - v \tilde{E} + F_0.$$

que provienen de las ecuaciones (2) planteando para  $V$ ,  $N$  y  $I$  la misma dependencia temporal que la propuesta en (3).

### LA INESTABILIDAD DE PIERCE EN GEOMETRIA CILINDRICA

Se estudian ahora las condiciones de umbral bajo las cuales un haz de electrones, que ha sido acelerado a una energía  $\gamma_0 m c^2$  e ingresa a una región entre electrodos equipotenciales (transparentes al haz), desarrolla la inestabilidad de Pierce.

Vamos a mostrar que en el diodo de Pierce existen otros estados estacionarios además de la solución de equilibrio con velocidad uniforme  $v(x) = v_0$  cuyas perturbaciones hemos calculado en la sección precedente. Las condiciones de contorno para las variables de perturbación del haz que ingresa a la cámara de deriva con velocidad  $-v_0 e_r$  y densidad  $n_e$ , son: perturbación nula tanto en la velocidad como en la densidad de ingreso, y se impone además que ambos electrodos estén al mismo potencial. Por lo tanto

$$V(1) = 0,$$

$$N(1) = 0,$$

(5)

$$\int_{x_1}^1 \frac{\tilde{E}(x)}{x} dx = 0,$$

donde  $x_i \equiv R_i/R_e$ .

Las soluciones estacionarias ( $v = 0$ ), con velocidad no uniforme deben satisfacer a la relación

$$F(2\mu, x) \equiv J_0(2\mu) Y_0(2\mu \sqrt{x}) - Y_0(2\mu) J_0(2\mu \sqrt{x}) = 0 \quad (6)$$

que surge de anular el determinante que asegura la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales y homogéneas correspondientes a las condiciones de contorno. De esta relación se deduce que existen infinitos pares  $(\mu, x)$  que corresponden a soluciones estacionarias. Estas, de acuerdo con la solución ya obtenida para  $E(x)$ , son de la forma

$$\tilde{E}(x) = -\frac{1}{\mu} \sqrt{x} [Y_0(2\mu) J_1(2\mu \sqrt{x}) - J_0(2\mu) Y_1(2\mu \sqrt{x})], \quad (7)$$

lo cual conduce, de acuerdo con (4), a la siguiente expresión para el potencial

$$\phi(x) - \phi(1) = -\gamma_0^3 \left(\frac{m}{e}\right) v_0^2 V(x) \quad (8)$$

Vamos a demostrar que los estados estacionarios no uniformes separan zonas estables e inestables. Cambios pequeños en los parámetros del estado estacionario (en velocidad, densidad o radio de los electrodos) pueden generar una inestabilidad. Calculando la frecuencia  $v = \epsilon$  que corresponde a un estado cuyos parámetros están próximos a un estado estacionario, a primer orden en  $\epsilon$  se tiene que

$$\epsilon = \frac{2 \mu^2 (b - a)}{2/\mu\pi - b - a} \Delta \quad (9)$$

donde  $\Delta$  denota el cambio relativo en  $\mu$  ( $\Delta \ll 1$ ) y se ha definido

$$a \equiv J_1(2\mu) Y_0(2\mu \sqrt{x_i}) - Y_1(2\mu) J_0(2\mu \sqrt{x_i}), \quad (10)$$

$$b \equiv \sqrt{x_i} [Y_0(2\mu) J_1(2\mu \sqrt{x_i}) - J_0(2\mu) Y_1(2\mu \sqrt{x_i})],$$

con  $a$  y  $b$  evaluados en el estado estacionario. Dado que  $\epsilon$  es real y  $\Delta$  siempre puede ser elegido positivo o negativo, hemos demostrado la existencia de la inestabilidad de Pierce en sistemas cilíndricos.

Para un par  $(\mu, x_i)$ , solución de (6) podemos calcular el valor de la corriente crítica  $j_c$  por encima del cual se desarrolla la inestabilidad. En el límite no relativista es

$$j_c = 10^{-4} \frac{\mu^2}{\pi^2} \frac{\Phi^{3/2}}{L^2} (x_i - 1)^2, \quad (11)$$

donde las unidades son Ampere/cm<sup>2</sup>, volts y cm.  $L$  representa la distancia entre electrodos. Recordemos que en el caso plano (flujo paralelo de electrones) vale la expresión<sup>4</sup>

$$j_c = 10^{-4} \frac{\Phi^{3/2}}{L^2}. \quad (12)$$

A partir de las expresiones (11) y (12) se puede comprobar que, a igualdad de valores de  $L$  y  $v_0$ , la densidad de corriente crítica para un flujo radial divergente ( $x_i > 1$ ) es mayor que para un haz paralelo, y ésta, a su vez, es mayor que para el caso convergente.

Cuando  $R_i \gg R_e$ , mediante la relación (11) se obtiene

$$j_c = \frac{10^{-4}}{4 R_e} \frac{\Phi^{3/2}}{L},$$

de modo que la corriente crítica en el caso cilíndrico es proporcional a  $1/L$ , mientras que en el caso plano resulta proporcional a  $1/L^2$ .

## RESULTADOS NUMERICOS

A partir de la ecuación (6), es posible obtener numéricamente las sucesivas posiciones electródicas que mantienen al sistema en estado estacionario para cada valor prefijado de  $\mu$ . En la Fig. 1 se ilustran las primeras posiciones electródicas correspondientes a los casos  $\mu = 2,5$  y  $10$ . Las posiciones señaladas son de umbral y la inestabilidad surge del análisis de las fórmulas (9) y (10) en cada caso particular.

En las Figs. 2 y 3 se presentan los gráficos de superficie de la función  $F(2\mu, x)$  definida en (6), donde la ecuación  $F = 0$  expresa la condición de solución estacionaria. La Fig.2 corresponde a los

casos de haces divergentes, mientras que la Fig.3 a los convergentes. En la primera de ellas, las zonas donde  $F$  es negativa se han recortado y se ilustran en blanco para dar mayor claridad a la figura. En la segunda se hace lo propio en las zonas donde  $F$  es positiva; de modo que en cada caso los pares  $(\mu, x_i)$  que corresponden a las soluciones estacionarias yacen sobre ambos márgenes de cada región blanqueada. En el plano inferior de cada Figura se ilustran diversas curvas de nivel de  $F$ . Puede apreciarse que tanto en el caso de haces convergentes como en el de divergentes, a medida que se incrementa  $\mu$ , es necesario reducir la distancia interelectrónica a fin de retomar la condición de umbral.

Finalmente, en la Fig.4 se presentan las respectivas barreras de potencial para los electrones (dadas por (8)), correspondientes a los casos ilustrados en la Fig. 1. En cada uno de ellos se han considerado las posiciones del electrodo de salida más cercanas al de entrada.

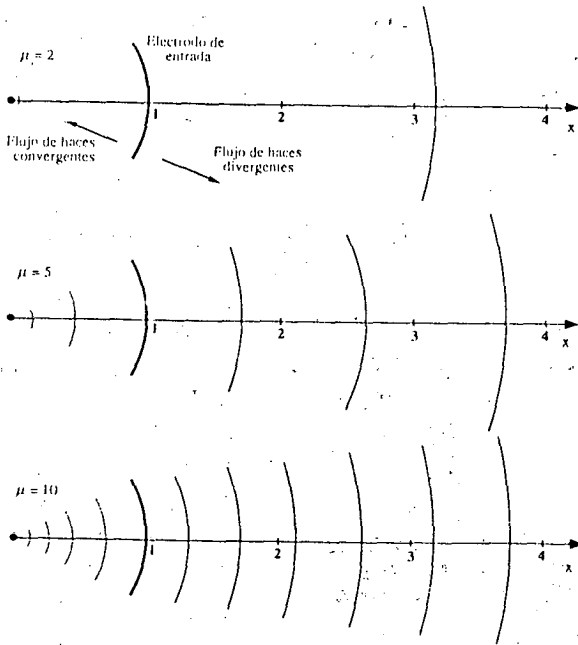


Figura 1: Configuraciones de electrodos que se hallan en el umbral de la inestabilidad, para valores de  $\mu = 2, 5$  y  $10$ . El electrodo de entrada de ha destacado, mientras que los de salida se ilustran en negro (para haces divergentes) y en gris (para los convergentes).

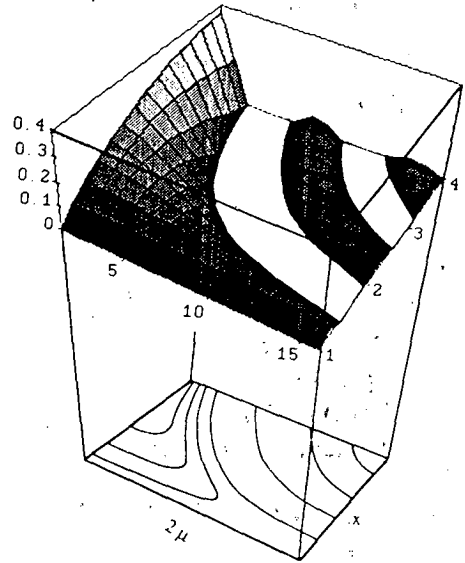


Figura 2: Gráfico de la superficie  $F(2\mu, x)$  para el caso de haces convergentes. La condición  $F=0$  determina las soluciones estacionarias (Ec. (6)). Las regiones  $F < 0$  se han recortado, de modo que los pares  $(\mu, x)$  que satisfacen (6) yacen sobre ambas márgenes de cada región blanqueada. En la parte inferior se ilustran diversas curvas de nivel de  $F$ .

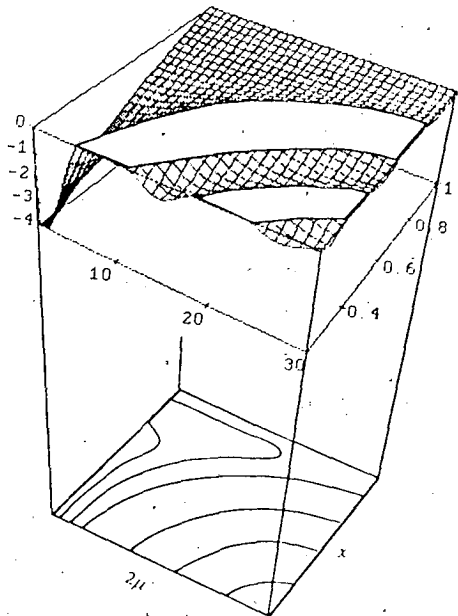


Figura 3: Gráfico de la superficie  $F(2\mu, x)$  para el caso de haces divergentes. La condición  $F=0$  determina las soluciones estacionarias (Ec. (6)). Las regiones  $F > 0$  se han recortado, de modo que los pares  $(\mu, x)$  que satisfacen (6) yacen sobre ambas márgenes de cada región blanqueada. En la parte inferior se ilustran diversas curvas de nivel de  $F$ .

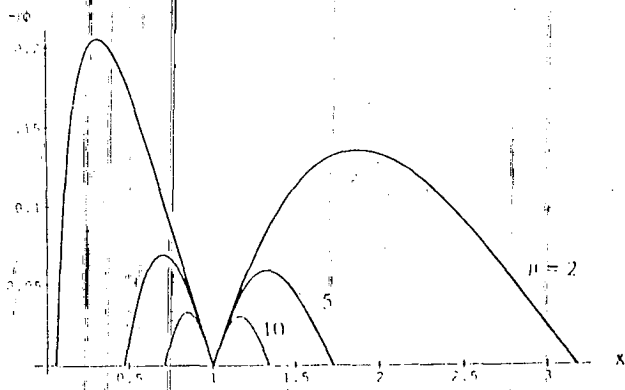


Figura 4: Barreras de potencial interelectrónico para los casos  $\mu = 2, 5$  y  $10$ .

#### CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

La inestabilidad de Pierce está directamente asociada a la imposición de condiciones de contorno correspondientes a un sistema acotado.

En el caso cilíndrico la inestabilidad depende de dos parámetros, en lugar de uno solo como en el caso plano, uno está asociado con la distancia interelectrónica y el otro depende de la distancia al centro de curvatura.

El conocido umbral para la inestabilidad de Pierce del caso plano se modifica considerablemente cuando dominan los efectos de curvatura, aún en el caso en que la distancia interelectrónica tienda a cero.

En todos los casos los efectos relativistas contribuyen a aumentar la estabilidad del sistema.

Se puede mostrar (a partir de la fórmula (6)) la equivalencia entre la inestabilidad del caso plano y el límite de pequeña curvatura del caso cilíndrico.

#### REFERENCIAS

1. Kuhn S., Phys.Fluids, **27**, 1834, (1984).
2. Crystal T.L. and Kuhn S., Phys. Fluids, **28**, 2116, (1985).
3. Godfrey B.B., Phys.Fluids, **30**, 1553 (1987).
4. Pierce J.R., J.Appl. Phys., **15**, 721, (1944).
5. Gratton F.T. and Gnani G., Phys. Fluids, **30**, 548, (1987).

CEILAP  
CITEFA - CONICET  
ZUFRIATEGUI Y VARELA  
1603 - VILLA MARTELLI  
REPUBLICA ARGENTINA